Úloha V.P ... to nechceš

9 bodů; (chybí statistiky)

Jistě jste již někdy slyšeli, že skořápka běžného slepičího vejce dokáže vydržet i poměrně velký tlak. Vysvětlete, jak je to možné, když je přeci velmi snadné vejce rozbít. V jakém směru snese skořápka největší zatížení? Proč a jak se rozbije, když ji zatížíme příliš? Popište různé mechanismy a určete, který je nejpravděpodobnější. Nezapomeňte, že se zabýváme skutečnými, nikoli ideálními vejci. Kde to bude možné, zkuste svá tvrzení podpořit výpočty.

Napadla Jáchyma při sledování kultovního českého filmu.

Úvod

Napriek tomu že táto úloha vyzerá jednoducho, plné riešenie problému tenkej vrstvy pod vonkajším tlakom je veľmi komplikované a aj výrazne zjednodušené modeli sú za rozsahom typickej úlohy. Preto sa tu najskôr pokúsime použiť relatívne jednoduchý 2D model guľovej škrupiny pozrieme sa na obmedzenia takéhoto modelu, hlavne sa ale pokúsime použiť jednoduché fyzikálne argumenty keďže takýto postup je omnoho inštruktívnejší ako riešenie veľkej sústavy parciálnych diferenciálnych rovníc.

Predtým ako začneme, predstavme si pár základných konceptov aby sme všetci boli na rovnakej stránke.

Napätie

Napätie, alebo stres, je veličina popisujúca vnútorné sily medzi časticami v materiáli. Určite poznáte napätie v jednoduchých prípadoch ako napríklad pri závaží visiacom na špagáte, čo spôsobí normálové napätie v špagáte $\sigma = F/A$, kde A je obsah prierezu špagátu (teda plochy kolmej na smer pôsobenia sily). Ak môžeme vidieť na tomto jednoduchom prípade, napätie má jednotky tlaku. Keďže sa snažíme špagát natiahnuť, budeme takémuto napätiu hovoriť napätie v ťahu [tension]. Ak si naopak predstavíme tyč na ktorej vrchu je závažie, takáto tyč bude v tlaku (kompresii, [compression]). To že sme museli vymeniť špagát za tyč ilustruje extrémny prípad dôležitého faktu: niektoré materiáli zvládajú ťah inak ako tlak. Ďalšia forma napätia je napätie v strihu, ktoré nastáva ak materiál (alebo jeho časť) je "ťahaný" v dvoch smeroch paralelne k jej povrchu (napríklad pri ťahaní zlepených papierov od seba alebo pri strihaní, kedy nožnice od seba tlačia 2 časti materiálu). Rovnako predtým definujeme napätie $\theta = F/A$, tu ale A značí plochu prierezu *paralelnú* so smerom sily (teda v prípade nožníc by táto plocha záležala na hrúbke papiera).

Zatiaľ čo pre väčšinu tejto diskusie je porozumenie normálového a strihového napätia postačujúce, pre 2D model budeme neskor potrebovať kompletnejší popis cez pomocou tenzora napätia.

Vajcia

Pozrime sa teraz na vlastnosti vajec. Je pomerne rozumné predpokladať že vajcia majú valcovú symetriu. Škrupina slepačích vajec má typicky hrúbku $(0{,}3 - 0{,}4)$ mm [1] výšku približne 50 mm and šírku o niečo menej. Pomer priemeru k hrúbke je teda blízko 100.

Materiál škrupiny je typ bio-keramického materiálu, ktorý je v kuracích vajciach zložený z 96 % uhličitanu vápenatého, 2 % organickej matrice a malého množstva horčíka, fosforu a

[1] `https://www.tandfonline.com/doi/full/10.1080/1828051X.2017.1344935`

ďalších stopových prvkov. Vnútorná mikroštruktúra je netriviálna a môžeme ju rozdeliť radiálne na 5 vrstiev, v angličtine nazývaných mammillary knob, cone, palisade, vertical crystal layer, a cuticle. Viac detailov a obrázky mikroštruktúry môžete nájsť v literatúre[2], čo je dôležité pre náš problém je že materiál keramika hlavne z kalcitu ale zo zložitou vnútornou štruktúrou.

Konkrétne vlastnosti škrupiny je ťažké nájsť, ale obecne vieme ze keramické materiály majú typicky vysoký Youngov modulus (sú nepoddajné [stiff]) ale sú krehké (brittle) a typicky slabšie v ťahu oproti tlaku (často 10× slabšie) kvôli vnútornej štruktúre kde sa defekty ako trhliny ktoré koncentrujú pnutie môžu ľahko šíriť v ťahu.

Experimentálne výsledky ukazujú že obsah škrupiny nemá výrazný vplyv na pevnosť vajec[3], preto bude vajce považovať za prázdnu škrupinu.

Vajcia predsa nie sú pevné!

Ako všetci vieme, je jednoduché vajcia rozbiť, ale ako hovorí zadanie, dokážu naozaj vydržať veľký tlak ak je aplikovaný správne. Aby sme zistili prečo, pozrime sa najskôr na rozdiel medzi situáciami keď aplikujeme tlak na vajce tým že ho napríklad stláčame v jednej ruke a tým ze ho buchneme o hranu panvice alebo hodíme na zem. Medzi týmito dvoma situáciami sú dva kľúčové rozdieli, pričom oba prispievajú k rozdielu v odolnosti vajca.

Prvým rozdielom je jednoducho plocha na ktorú je tlak aplikovaný; ak vajce stlačíme, sila sa rozloží na pomerne veľkú plochu a výsledný tlak nie je ta veľký. V prípade vajce, alebo akéhokoľvek objektu podobného tvaru, to ze je sila rozložená ale pomôže aj iným spôsobom. Keď aplikujeme silu musíme uvažovať nad smerom akým táto sila pôsobí. Ak je ten smer kolmý na tvar povrch spôsobuje napätie v strihu (shear) a keďže je škrupina veľmi tenká toto napätie bude veľmi vysoké, zatiaľ co ak je sila rozložená, materiál ma viac priestoru previesť toto napätie do napätie vnútri v škrupine kde dokáže zniesť omnoho vyššie napätie.

Keď vajce stláčame, tlak sa aplikuje pomalí a môžeme ignorovať dynamické sily tento proces považovať za isostatický kedy stav materiálu môžeme riešiť v každom momente samostatne, zatiaľ čo keď vajce narazíme o hranu aplikujeme silu veľmi rýchlo a materiál nemá čas aby tieto sily vyrovnal, čím sa maximálne napätie v materiáli zvýši.

Tak ako silné sú vajcia?

Zistili sme že toto je veľmi zložitý problém, pozrime sa teda na nejaké experimentálne výsledky. Tiež je možné použiť simuláciu pomocou finite element analysis na odhad sily, ale takáto simulácia nezachytí detaily nedokonalého biologického materiálu. Môžeme nájsť niekoľko článkov popisujúcich silu škrupiny online, napríklad [4] hovori že slepačie vajcia dokážu pri vhodnom loadingu pozdĺž ich osi odolať veľkej sile, ale tiež nasli veľkú variabilitu medzi jednotlivými vajcami. Obecne vyzerá že slepačie vajcia dokážu typicky odolať sile až 700 N.

Módy zlyhania

Ako sa vajcia rozbijú ak túto silu prekročíme? Existuje viacero možných mechanizmov rozbitia vajca. To, ktorý nastane závisí od vlastností vajca a spôsobu ako naň pôsobí sila.

[2] `https://link.springer.com/chapter/10.1007/978-1-4615-3060-2_1`, `https://www.ncbi.nlm.nih.gov/pmc/articles/PMC4118947/`, `https://pubmed.ncbi.nlm.nih.gov/22201802/`

[3] `https://www.ncbi.nlm.nih.gov/pmc/articles/PMC5310731/` (section 3.3)

[4] `https://www.ncbi.nlm.nih.gov/pmc/articles/PMC5310731/`

Strihové zlyhanie

Ako sme už spomenuli pri prípade rozbitia úderom do malého miesta, keď strihové napätie prekročí medzu pevnosti materiálu vajce sa v tomto bode rozbije. Pevnosť je tiež znížená tým že takýto úder aplikuje silu veľmi rýchlo, čo vyžaduje veľký strain rate aby túto silu vykompenzoval.

V prípade že je sila rozložená a pôsobí v smere osi vajca je situácia zložitejšie a možných módov zlyhania je viac.

Buckling

Možno poznáte situáciu bucklingu (vypúlenia?) Eulerovej tyče, čo je prípad keď stláčame tyč pozdĺžne až sa stane mechanicky nestabilnou a „vypúli“ sa do jedného smeru. Asi si viete predstaviť alebo ste možno aj videli hračky z tenkého plastu kde táto situácia nastáva na tenkom zakrivenom materiáli. Keďže ale keramický materiál vajca nie je veľmi flexibilný, tento mód je nepravdepodobný.

Ťah na vnútornom povrchu

Keď ohýbame štruktúru konečnej hrúbky, napätie pôsobí na opačných stranách v opačnom smere (predstavte si ohnutú tyč), materiál je v ťahu na vonkajšom povrchu a v kompresií na vnútornom povrchu (vnútorný a vonkajší v smere ohybu). Na to aby materiál kompenzoval stres aj keď má veľký Youngov modul vždy sa musí mierne zdeformovať (Hookov zákon), čo v prípade vajca znamená že sa mierne povrch prehne smerom dnu voči pôvodnému tvaru, čo vedie k ťahu na vnútornom povrchu vajca a kompresií na jeho vonkajšom povrchu. Keďže keramický materiál vajca je výrazne slabší v ťahu, na vnútornom povrchu môže dojsť k praskline ktorá sa bude šíriť. Toto sa zdá byť častý mód zlyhania,[5] ale v závislosť na spôsobe aplikovania tlak nemusí vždy viesť k úplnému zlyhaniu. Vrchu vajca praskne zdeformuje sa, čím sa bude sila efektívne prednášať na zvyšok škrupiny ktorá potom prežije vyšší tlak (ak sa trhlina nedostane aj na túto časť škrupiny).

Hoop tension

Keď aplikuje kompresiu pozdĺž osi, indukujeme ťah pozdĺž rovnobežiek na povrchu. Toto je pomerne intuitívny výsledok; predstavte si ako sily pôsobia pozdĺž poludníkov, keďže sa poludníky na guli aj na vajci rozchádzajú kvôli zakriveniu povrchu, vznikne sila pôsobiaca pozdĺž rovnobežiek, ťahové napätie je preto potrebné pozdĺž rovnobežiek aby sa vajce neroztrhlo. Ak toto napätie prekročí pevnosť vajca, vajce sa roztrhne. Toto napätie pôsobí na veľkom povrchu, čo, ako uvidíme neskor hrá rolu. Toto je typický mód zlyhania v niektorých experimentoch.[6]

2D model

Skúsme teraz vytvoriť zjednodušený 2D model škrupiny. Budeme hovoriť a gulovej škrupine (aj keď ako uvidíte riešenie pre ľubovolnú škrupinu rotácie je prakticky rovnaké).

Nasledujúca sekcia je pomerne zložitá a rozhodne nebola potrebná na získanie plného počtu bodov, je tu len pre čitateľa so záujmom.

[5] `https://www.tandfonline.com/doi/abs/10.1080/00071666708415678`

[6] `https://www.ncbi.nlm.nih.gov/pmc/articles/PMC5310731/`

Cauchyho tensor napatia

Obecne môže stres v materiáli byť v ľubovolnom smere a teda jednoduchý popis aký sme používali vyššie nám tu nebude stačiť. Keďže sila pôsobiaca na rovinu v materiáli bude závisieť na orientácií tejto roviny, potrebujeme popis ktorý nám dá silu pôsobiacu na ľubovolnú rovinu definovanú jej normálovým vektorom a teda potrebujeme mapu z vektoru na vektor, čo je tenzor. Zatiaľ čo tenzory sa zo začiatku môžu zdať desivé, tu nepotrebujeme nič zložité, jednoducho ho použijeme ako maticu.

Tenzor plne popisujúci napätie v materiáli sa nazýva Cauchy stress tensor. Jeho komponenty v Kartézkych súradniciach môžeme jednoducho vyčítať z predošlej diskusie. Chceme maticu $\boldsymbol{\sigma}$ takú aby keď ju aplikujeme na normálový vektor k rovine $\mathbf{n}$ dostaneme silu ktorá pôsobí na túto rovinu ($\mathbf{T} = \mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\sigma}$). Vieme že normálové napätia $\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z$ pôsobia na roviny kolmé na x, y, z osi v smere pozdĺž týchto osí (napr. σ_x pôsobí pozdĺž x na yz rovinu). Akýkoľvek strih pôsobí v kolmých rovinách a teda tu neprispieva. Teda hneď vidíme že diagonálne komponenty matice budú $(\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z)$. Strihové komponenty sú trochu menej intuitívne, ale vieme že sú to nediagonálne komponenty ktoré pôsobia pozdĺž rovín a teda

$$\boldsymbol{\sigma} = \begin{pmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \sigma_y & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \sigma_z \end{pmatrix} .$$

Tento tenzor bude závislí na polohe, teda napätie tvorí tenzorové pole.

Pozorný čitateľ si všimol že tu hovoríme o rovnováhe, teda tento tenzor musí spĺňať nejaké podmienky aby sa časť materiálu voči sebe nepohybovali.

Uvažujme ľubovolný objem V v materiáli uzavretý povrchom S. Na každý pod na povrchu pôsobí sila $\mathbf{T}(x, y, z)$ kvôli napätiu v materiáli a na každý objemový element pôsobia telesové sily (body forces) $\mathbf{F}$ (napríklad tiažová sila) nezávislé od napätia (tieto neskor zanedbáme). Vieme že celková sila na každý takýto objem musí byť nulová, teda ak sčítame všetky sily na povrchu a všetky telesové sily

$$\int_V F_i \, \mathrm{d}V + \int_S \sigma_{ji} n_j \, \mathrm{d}S = 0 \,,$$

kde sme použili indexovú notáciu a Einsteinovu sumačnú konvenciu (opakované indexy sa sčítajú, teda rovnosť $\mathbf{T} = \mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\sigma}$ vieme napísať ako $T_i = \sigma_{ji} n_j$ týmto spôsobom), toto bude používať v celej nasledujúcej sekcii keďže to veľmi zjednoduší vyjadrenia. Teraz môžeme použiť Gaussovu vetu a nahradiť integrál cez povrch objemovým integrálom a dostaneme

$$0 = \int_V F_i \, \mathrm{d}V + \int_V \frac{\partial \sigma_{ji}}{\partial x_j} \, \mathrm{d}V = \int_V F_i + \frac{\partial \sigma_{ji}}{\partial x_j} \, \mathrm{d}V \,,$$

$$0 = F_i + \frac{\partial \sigma_{ji}}{\partial x_j} \,, \tag{1}$$

kde sme posledný riadok dostali tým že hovoríme o ľubovolnom objeme a jediný spôsob ako bude tento integrál 0 pre ľubovolný objem je ak je integrand nula. Toto nám dá 3 rovnice (všimnite si že index i sa nevysčítal), ktoré musí tenzor stresu spĺňať.

Toto ale nie je jediná podmienka. Tiež musíme dodržať zachovanie momentu hybnosti a teda súčet všetkých momentov síl voči ľubovolnej osi musí byť nula. Podobným spôsobom ako vyššie dostaneme, označujúc sily na povrch $\mathbf{T}$ a telové sily $\mathbf{F}$

$$0 = \int_S (\mathbf{r}\times\mathbf{T})_i \,\mathrm{d}S + \int_V (\mathbf{r}\times\mathbf{F})_i \,\mathrm{d}V = \int_S \varepsilon_{ijk}x_j\sigma_{mk}n_m \,\mathrm{d}S + \int_V \varepsilon_{ijk}x_jF_k \,\mathrm{d}V =$$
$$= \int_V \frac{\partial \varepsilon_{ijk}x_j\sigma_{mk}}{\partial x_m}\,\mathrm{d}V + \int_V \varepsilon_{ijk}x_jF_k\,\mathrm{d}V\,,$$
$$0 = \varepsilon_{ijk}\left(\sigma_{mk}\frac{\partial x_j}{\partial x_m} + x_j\frac{\partial \sigma_{mk}}{\partial x_m} + x_jF_k\right)\,,$$

kde sme prepísali vektorový súčin pomocou Levi-Civita symbolu ε,[7] Gaussovu vetu a rozšírili deriváciu. Všimnime si že člen

$$\frac{\partial x_i}{\partial x_m}$$

je jedna ak a iba ak $i = m$ (keďže vtedy je tvaru $\partial x/\partial x$) a nula inak. Tenzor ktorý sa takto správa je známy ako Kroneckerovo delta δ_{ij} a jeho efekt v sumácii je že efektívne „premenuje“ index $j \to i$ (alebo naopak). S touto vedomosťou dostaneme

$$0 = \int_V \varepsilon_{ijk}\left(\sigma_{jk} + x_j\left(\frac{\partial \sigma_{mk}}{\partial x_m} + F_k\right)\right)\mathrm{d}V = \int_V \varepsilon_{ijk}\sigma_{jk}\,\mathrm{d}V\,,$$
$$0 = \varepsilon_{ijk}\sigma_{jk}\,,$$

kde sme dostali druhý riadok tým že sme si všimli že výraz násobený x_j je rovnaký ako podmienka ktorú sme videli vyššie (1). Rozšírením posledného výrazu a použitím vlastností ε dostaneme $\sigma_{12} = \sigma_{21}, \sigma_{23} = \sigma_{32}, \sigma_{13} = \sigma_{31}$, teda $\sigma_{ij} = \sigma_{ji}$ a tenzor stresu je symetrický.

Spherical coordinates

Doteraz sme sa zapodievali Kartézkymi súradnicami, ale pre náš problém tieto nie sú veľmi užitočné. Mohli by sme vajce aproximovať ako niečo s valcovou symetriou, ale pre ešte jednoduchší model sa pozrime na prípad sférickej symetrie. Na to budeme len potrebovať transformovať rovnicu (1) do sférických súradníc. Toto urobíme tak že transformujeme tenzor stresu a aplikujeme derivácie [8] a dostaneme tri rovnice (zanedbávajúc telesové sily (teda hmotnosť škrupiny))

$$0 = \frac{\partial \sigma_r}{\partial r} + \frac{1}{r}\frac{\partial \tau_{r\theta}}{\partial \theta} + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial \tau_{r\varphi}}{\partial \varphi} + \frac{1}{r}\left(2\sigma_r - \sigma_\theta - \sigma_\varphi + \frac{\tau_{r\theta}}{\operatorname{tg}\theta}\right)\,,$$
$$0 = \frac{\partial \tau_{r\theta}}{\partial r} + \frac{1}{r}\frac{\partial \sigma_\theta}{\partial \theta} + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial \tau_{\theta\varphi}}{\partial \varphi} + \frac{1}{r}\left(\frac{\sigma_\theta - \sigma_\varphi}{\operatorname{tg}\theta} + 3\tau_{r\theta}\right)\,,$$
$$0 = \frac{\partial \tau_{r\varphi}}{\partial r} + \frac{1}{r}\frac{\partial \tau_{\theta\varphi}}{\partial \theta} + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial \sigma_\varphi}{\partial \varphi} + \frac{1}{r}\left(3\tau_{r\varphi} + \frac{2\tau_{\theta\varphi}}{\operatorname{tg}\theta}\right)\,.$$

[7] Toto je totálne antisymetrický tenzor, dávajúci 1 keď ijk je párna (sudá) permutácia 123 (napr. 123), -1 keď je to nepárna (lichá) permutácia 123 (napr. 132) a 0 inak.

[8] alebo nájdeme vyjadrenie pre tenzorovú divergenciu v sférických súradniciach online

Ah, super. Teraz máme 3 parciálne diferenciálne rovnice so 6 neznámymi funkciami. Spravme krok spať a pozrime sa na situáciu ktorú riešime. Najskôr problém zjednoduším použitím valcovej symetrie, teda že všetky funkcie sú nezávislé na φ. Môžeme teda hneď odstrániť všetky členy s $\partial/\partial\varphi$, to ale nie je všetko. Táto symetria tiež znamená $\tau_{\varphi\theta} = \tau_{r\varphi} = 0$ (keďže tieto by museli byť nezávislé na φ integrovanie pozdĺž celého rozsahu φ (teda po obručiach) nemôže viesť k nenulovej sile, inak by sa obruče hýbali). Toto veľmi zjednoduší rovnice ale bohužiaľ to tiež odstráni poslednú z rovníc úplne a zostane nám

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{\partial\sigma_r}{\partial r} + \frac{1}{r}\frac{\partial\tau_{r\theta}}{\partial\theta} + \frac{1}{r}\left(2\sigma_r - \sigma_\theta - \sigma_\varphi + \frac{\tau_{r\theta}}{\operatorname{tg}\theta}\right) , \\ 0 &= \frac{\partial\tau_{r\theta}}{\partial r} + \frac{1}{r}\frac{\partial\sigma_\theta}{\partial\theta} + \frac{1}{r}\left(\frac{\sigma_\theta - \sigma_\varphi}{\operatorname{tg}\theta} + 3\tau_{r\theta}\right) . \end{aligned}$$

To už vyzerá dosť lepšie. Ak sa pozrieme na okrajové podmienky, vidíme že chceme problém rozdeliť na dve časti: jedna bude popisovať dva guľové vrchlíky na ktoré pôsobí sila z vonku, a druhá bude popisovať zvyšok škrupiny kde je povrch voľný (keď zanedbáme tlak vzduchu ktorý pôsobí z oboch strán).

Tento 2D model nedokáže dobre popísať guľové vrchlíky keďže tu hrá výraznú rolu strihové napätie, takže sa pozrieme len na riešenie druhej časti. Pre túto časť máme z voľného povrchu okrajové podmienky

$$\sigma_r(R,\theta) = \tau_{r\theta}(R,\theta) = \sigma_r(R+t,\theta) = \tau_{r\theta}(R+t,\theta) = 0 ,$$

kde t je hrúbka škrupiny a R je jej vnútorný priemer.

Aby sme sa dostali k prvému skutočnému výsledku, uvažujme limitu $t \to 0$, teda skutočne 2D škrupinu. Toto prakticky odstráni závislosť na r keďže $r = R$ sa stane konštantou vnútri škrupiny, ale tiež to znamená že škrupina nedokáže udržať strihové $\tau_{r\theta}$ ani normálové napätie σ_r keďže okrajové podmienky znamenajú $\tau_{r\theta}(R,\theta) = \sigma_r(R,\theta) = 0$ a jediné r je $r = R$. Ak toto vložíme do našich rovníc, dostaneme

$$\begin{aligned} 0 &= -\sigma_\theta - \sigma_\varphi , \\ 0 &= \frac{\partial\sigma_\theta}{\partial\theta} + \frac{\sigma_\theta - \sigma_\varphi}{\operatorname{tg}\theta} . \end{aligned}$$

Kombináciou týchto dvoch obyčajných diferenciálnych rovníc dostaneme σ_θ

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{\mathrm{d}\sigma_\theta}{\mathrm{d}\theta} + 2\frac{\sigma_\theta}{\operatorname{tg}\theta} , \\ \int \frac{\mathrm{d}\sigma_\theta}{\sigma_\theta} &= -2\int \frac{\mathrm{d}\theta}{\operatorname{tg}\theta} . \end{aligned}$$

Riešenie je

$$\begin{aligned} \sigma_\theta &= \frac{C}{\sin^2\theta} , \\ \sigma_\varphi &= -\frac{C}{\sin^2\theta} . \end{aligned}$$

Kde C je konštanta závislá na vonkajšej sile. Pre jednoduchosť predpokladajme že sila je aplikovaná na kruhovú oblasť okolo osi koľko na povrch vajca (teda prispievajúc do $\sigma_r = p$ pre $\theta < \theta_0$ alebo $\theta > \pi - \theta_0$ kde θ_0 určuje veľkosť oblasti kde sila pôsobí). Z našich riešení vidíme že ak aplikujeme silu na veľmi malú oblasť dostaneme veľké napätia kvôli $1/\sin^2\theta$ členu.

Ako vidíme kompresia pozdĺž k poludníkov vedia ku ťahu na rovnobežkách. Tiež vidíme že toto 2D riešenie je nekompletné: v 3D realite je strih $\tau_{r\theta}$ nenulový. Mohli by sme uvažovať zložitejšiu verziu tejto teórie kde by sme považovali napätie za konštantné vnútri tenkej škrupinu s napätím daným ako iba ako funkciou θ a integrovaním rovníc cez tenkú škrupinu. Toto ale vedie iba na 2 rovnice pre 3 neznáme funkcie, čo je zjavne nedostatočné. Chýbajúci kúsok puzzle sú rovnice pre mechanickú deformáciu, tie by ale model extrémne skomplikovali.

Aby sme určili konštantu C, stačí nám určiť celkovú silu ktorá za z guľového vrchlíka pod vonkajším tlakom musí preniesť na zvyšok škrupiny. Ako sme spomenuli naše riešenie v guľovom vrchlíku nefunguje, ale stále platí že tento vrchlík musí preniesť všetku vonkajšiu silu na zvyšok škrupiny keďže reakcia na túto silu to čo kompenzuje vonkajšiu silu a drží túto časť škrupiny na mieste. Táto sila sa môže preniesť iba cez kruhové rozhranie na θ_0. Porovnaním celkovej sily pôsobiacej na vrchlík s projekciou sily z napätia na tomto rozhraní (reakcia na ktorú drží vrchlík na mieste) do vertikálneho smeru dostaneme,

$$
\begin{aligned}
2\pi \sin^2\theta_0 R\sigma_\theta(\theta_0)t &= -F\,,\\
C &= -\frac{F}{2\pi Rt}\,,\\
\sigma_\theta(\theta) &= -\frac{F}{2\pi Rt\sin^2\theta}\,, \quad \theta \in (\theta_0, \pi - \theta_0)\ ,
\end{aligned}
$$

Kde F je celková sila pôsobiaca na vajce t je hrúbka škrupiny.

Ako sme spomenuli vyššie, keramické materiáli majú nižšiu pevnosť v ťahu ako v kompresií a preto v tomto modeli sa vajce rozbije kvôli ťahu pozdĺž rovnobežiek.

Fakt že kompresia na poludníkoch vedie na ťah na rovnobežkách je zjavný len z geometrie, nečakali by sme ale že bude napätie bude maximálne v θ_0. Toto je dôsledok 2D modelu ktorý nedokáže udržať nevyhnutné strihové napätie v θ_0. Závislosť F/R je zaujímavá, ak uvažujeme nad tlakom namiesto silí $F \propto pR^2$, dostaneme napätie $\sigma_\theta \propto pR$, teda malé gule (alebo tvary s malým lokálnym polomerom krivosti) odolávajú tlaku lepšie.

Ďalšia možnosť zlyhania gule ktorú sme spomenuli vyššie je že sa stane mechanicky nestabilnou a vypúli sa dnu (buckle). Toto sa stane v oblasti kde pôsobí vonkajšia sila a naše riešenie tu neplatí, ale fakt že dostaneme ťah po rovnobežkách stále platí a tu pomôže spevniť povrch voči takémuto prevaleniu. Pokračujúc v tejto myšlienke, ako sme zistili vyššie útvary s menším polomerom krivosti dokážu rýchlejšie previesť tlak na rovnobežkový ťah a teda sú odolnejšie voči takémuto prevaleniu. Ak dáme všetko toto dokopy, vidíme že vajce je naozaj najsilnejšie pozdĺž jeho osi.

Membránová teória

Čo sme získali vyššie je známy model z membránovej teórie škrupín, a ak sa vrátim a kúsok spať, videli sme že strihové a normálové napätie je nevyhnuté nulové. Toto dáva zmysel keďže škrupina má nulovú hrúbku, ale tiež to znamená že všetky sily musia pôsobiť tangenciálne voči povrchu, čo je výrazné obmedzenie keďže v tomto prípade sily zjavne nie sú tangenciálne.

Toto tiež vysvetľuje prečo sme dostali maximálne napätie v ťahu v θ_0: ak je tu sila aplikovaná tangenciálne potrebujeme veľké napätie pozdĺž θ_0 rovnobežky aby sme škrupinu udržali pokope (predstavte si sily na valec so stlačeným plynom).

Plné sférické riešenie

Keďže náš 2D model nám nedal uspokojivé riešenie, mohli by sa pokúsiť nájsť plné riešenie pomocou rovníc pre elastickú deformáciu a použiť elastické vlastnosti škrupiny nájditelné online. Myšlienka je použiť 3 rovnice kontinuity ktoré sme použili vyššie, napísať 6 stress-strain rovníc (v podstate Hookov zákon vo všetkých smeroch) a 3 rovnice pre deformácie v zvolených súradniciach, z čoho dostaneme sústavu 15 parciálnych diferenciálnych rovníc. Valcová symetria znamená $\tau_{\theta\varphi} = \tau_{r\varphi} = 0$ a rovnice sa o niečo zjednodušia. Plné analytické riešenie tohto prípadu existuje a je vyjadriteľné pomocou nekonečných rád Legendreovych polynómov.[9]

Zakrivenie povrchu a sila

Ako vieme intuitívne a ako sme videli v 2D modeli, vajcia sú najsilnejšie pozdĺž ich osi. Toto je dané tým ako sa napätie rozkladá v materiáli, čím vyššie zakrivenie tým rýchlejšie sa strihové napätie dokáže previesť do tangenciálneho ťahu a kompresie, kde je škrupina omnoho silnejšia. To znamená že ostrejšie vajcia budú silnejšie v tomto smere. Väčšie existujúce zakrivenie tiež pomôže s ťahom na vnútornom povrchu indukovanom zakrivením.

Skutočné vajcia

Ako každý biologický materiál, škrupina nie je všade rovnaká. Jej hrúbka a zloženie má nejakú variability a škrupina obsahuje mnoho mikroprasklin a ďalších materiálových defektov ktoré prerušujú *tok* napätia v materiáli (sila sa nedokáže preniesť cez prasklinu), čo vytvorí lokálne koncentrácie napätia vedúce k zlyhaniu. Ak dôsledok tohto nedokážeme presne predpovedať medzu pevnosti ani mód zlyhania, keďže skutočné vajce pravdepodobne praskne v mieste kde existujúci defekt vytvoril vysokú koncentráciu napätia alebo už prítomná mikro-trhlina narastie tak že vajce sa rozbije.

Zatiaľ čo tieto materiálové nedokonalosti vyzerajú ako jednoduchá vec, ich dôsledok je veľmi hlboký. Ich náhodná prítomnosť znamená že prasknutie vajca je efektívne stochastický proces, s pravdepodobnosťou prasknutia v nejako danom bode (teda v nejakom objemovom elemente) závislou na napätí v tomto bode, tým ako dlho je tento bod týmto napätím a aj ako rýchlo sa pod toto napätie dostal. To znamená že pravdepodobnosť že vajce praskne kdekoľvek závisí na tom ako veľký objem je vystavený takmer-kritickému napätiu. Ak predpokladáme že škrupina má približne konštantnú hrúbku a ďalšie parametere, tento objem bude úmerný povrchu a teda tvar ktorí dokáže rýchlo rozložiť napätie bude mať menší povrch pod takmer-kritickým napätím a nižšiu pravdepodobnosť zlyhania. Toto prispieva tomu prečo rovnobežkový ťah môže mať väčší vplyv ako vyššie napätie na vrchu vajca, keďže tento ťah pôsobí na veľmi veľkom povrchu.

Záver

Uvažujúc všetko čo sme tu spomínali a citované experimentálne výsledky, môžeme teraz odpovedať na otázky v zadaní

[9] `https://link.springer.com/article/10.1007%2Fs00419-015-0993-8`

- Vajcia sa ľahko rozbijú ak je rýchlo aplikovaná veľká sila na malí povrch, ale ich tvar dokáže rozložiť strihovú a normálovú silu do tangenciálnych napätí kde je škrupina omnoho silnejšia.

- Vajcia sú najsilnejšie pozdĺž ich osi a väčšie zakrivenie efektívnejšie rozloží aplikované napätie.

- *Väčšina* vajec pravdepodobne zlyhá kvôli indukovanému rovnobežkovému ťahu keďže keramický materiál je omnoho slabší v ťahu ako v kompresií, ale predpovedať mód zlyhania pre konkrétne vajce je takmer nemožné kvôli variabilite vajec a materiálovým defektom.

Filip Ayazi
`filip@fykos.cz`