## Úloha V.5 ... rheonomní katapult

10 bodů; (chybí statistiky)

*Mějme tenkou obdélníkovou desku, která se otáčí kolem své horizontálně orientované hrany konstantní úhlovou rychlostí. V okamžiku, kdy se deska nachází ve vodorovné poloze a otáčí se směrem nahoru, na ni umístíme malý kvádřík tak, aby se vzhledem k ní zpočátku nepohyboval. Jak se bude kvádřík po desce pohybovat, jestliže je tření mezi oběma tělesy nulové? Kam musíme kvádřík na začátku umístit, aby z desky vyletěl po čtvrtině otáčky desky? Diskutujte dále všechny potřebné předpoklady, které pro to musí být splněny.*

*Bonus* *Jaký výkon dodává deska kvádříku a jakou celkovou práci na něm vykoná?*

*Vaška už omrzely příklady na skleronomní vazby, tak přišel s vazbou rheonomní.*

### *Odvození pohybových rovnic*

Jedná se o mechanickou úlohu s vazbou, neboť malý kvádřík můžeme aproximovat hmotným bodem vázaného na desku do okamžiku, kdy z ní vyletí. Deska působí na kvádřík jako vazba závislá na čase, tj. rheonomní vazba (odtud název úlohy). Vazba nezávislá na čase se nazývá skleronomní. Pohyb kvádříku nalezneme vyřešením pohybových rovnic. Nejdříve však potřebujeme zvolit souřadnice. Problém je efektivně dvourozměrný, protože se kvádřík bude pohybovat po desce ve směru kolmém k ose otáčení a také se bude otáčet společně s deskou. Stačí nám proto zvolit dvě kartézské souřadnice $x$, $y$ s počátkem na ose otáčení. Dále si zavedeme druhou sadu souřadnic, a to polární souřadnice $r$, $\varphi$. Souřadnice $r$ měří vzdálenost od osy otáčení a úhel $\varphi$ měří orientovaný úhel sevřený spojnicí počátku a daného bodu s kladnou poloosou $x$, jak je vidět na obrázku 1. Transformační vztahy z polárních do kartézských souřadnic jsou

$$x = r\cos\varphi\,, \tag{1}$$

$$y = r\sin\varphi\,. \tag{2}$$

Pohyb kvádříku v závislosti na čase $t$ je pak dán funkcemi $x = x(t)$ a $y = y(t)$, resp. funkcemi $r = r(t)$ a $\varphi = \varphi(t)$. Nachází-li se kvádřík na desce, je souřadnice $\varphi$ kvádříku totožná s úhlem natočení desky, pro který ze zadání platí $\varphi(t) = \omega t$, kde $\omega > 0$ je konstantní velikost úhlové rychlosti. Kartézské souřadnice $x$ a $y$ generují vektorová pole $\mathbf{e}_x$ a $\mathbf{e}_y$. To jsou tečné vektory k souřadnicovým čárám $y =$ konst a $x =$ konst mající jednotkovou velikost. Vektor rychlosti $\mathbf{v}$ kvádříku pak je

$$\mathbf{v}(t) = \dot{x}(t)\,\mathbf{e}_x + \dot{y}(t)\,\mathbf{e}_y\,,$$

kde tečka značí (totální) časovou derivaci. Časovou závislost zdůrazněnou v kulatých závorkách budeme často pro přehlednost vynechávat. Časovou derivací vektoru rychlosti $\mathbf{v}$ dostaneme zrychlení kvádříku

$$\mathbf{a} = \ddot{x}\mathbf{e}_x + \ddot{y}\mathbf{e}_y\,. \tag{3}$$

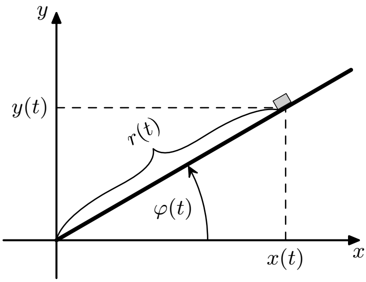
Poznamenejme, že jsme využili faktu, že se vektor $\mathbf{e}_x$ (jeho velikost i směr) podél trajektorie kvádříku nemění (podobně i vektor $\mathbf{e}_y$), neboli

$$\dot{\mathbf{e}}_x \equiv \frac{\mathrm{d}\mathbf{e}_x}{\mathrm{d}t} = 0\,.$$

Nyní využijeme transformační vztahy (1) a (2), do kterých dosadíme konkrétní souřadnice kvádříku a rovnice (totálně) zderivujeme podle času $t$, čímž dostaneme

$$\dot{x} = \dot{r}\cos\varphi - r\dot{\varphi}\sin\varphi\,,$$

$$\dot{y} = \dot{r}\sin\varphi + r\dot{\varphi}\cos\varphi\,.$$




Obr. 1: Kartézské a polární souřadnice.

Další časovou derivací získáme

$$\ddot{x} = \ddot{r}\cos\varphi - 2\dot{r}\dot{\varphi}\sin\varphi - r\ddot{\varphi}\sin\varphi - r\dot{\varphi}^2\cos\varphi\,,$$
$$\ddot{y} = \ddot{r}\sin\varphi + 2\dot{r}\dot{\varphi}\cos\varphi + r\ddot{\varphi}\cos\varphi - r\dot{\varphi}^2\sin\varphi\,.$$

Tyto rovnice dosadíme do vztahu (3), čímž dostaneme zrychlení ve tvaru

$$\begin{aligned}\mathbf{a} = &\left(\ddot{r}\cos\varphi - 2\dot{r}\dot{\varphi}\sin\varphi - r\ddot{\varphi}\sin\varphi - r\dot{\varphi}^2\cos\varphi\right)\mathbf{e}_x + \\ &+ \left(\ddot{r}\sin\varphi + 2\dot{r}\dot{\varphi}\cos\varphi + r\ddot{\varphi}\cos\varphi - r\dot{\varphi}^2\sin\varphi\right)\mathbf{e}_y\,.\end{aligned} \tag{4}$$

Celková síla $\mathbf{F}$ působící na kvádřík je dána součtem reakce $\mathbf{N}$ desky na kvádřík a tíhové síly $m\mathbf{g}$, neboli

$$\mathbf{F} = \mathbf{N} + m\mathbf{g} = -\left(N\sin\varphi\right)\mathbf{e}_x + \left(N\cos\varphi - mg\right)\mathbf{e}_y\,, \tag{5}$$

kde $N$ je (orientovaná) velikost reakce $\mathbf{N}$, $m$ je hmotnost a $g$ je velikost tíhového zrychlení. Druhý Newtonův pohybový zákon lze matematicky vyjádřit ve tvaru $\mathbf{F} = m\mathbf{a}$. Z rovnic (4) a (5) potom dostáváme pohybové rovnice

$$-N\sin\varphi = m\left(\ddot{r}\cos\varphi - 2\dot{r}\dot{\varphi}\sin\varphi - r\ddot{\varphi}\sin\varphi - r\dot{\varphi}^2\cos\varphi\right)\,, \tag{6}$$

$$N\cos\varphi - mg = m\left(\ddot{r}\sin\varphi + 2\dot{r}\dot{\varphi}\cos\varphi + r\ddot{\varphi}\cos\varphi - r\dot{\varphi}^2\sin\varphi\right)\,. \tag{7}$$

Jedná se o soustavu dvou obyčejných diferenciálních rovnic se třemi neznámými funkcemi $r(t)$, $\varphi(t)$ a $N(t)$. Nezapomeňme však, že ještě máme zadán pohyb desky (a tedy i jednu souřadnici kvádříku) $\varphi(t) = \omega t$. Ještě před tím, než dosadíme $\varphi(t) = \omega t$, upravíme soustavu rovnic (6) a (7) do jednodušší podoby. Rovnici (6) vynásobíme $(\sin\varphi)/m$ a rovnici (7) vynásobíme $(\cos\varphi)/m$, čímž dostaneme

$$-\frac{N}{m}\sin^2\varphi = \ddot{r}\sin\varphi\cos\varphi - 2\dot{r}\dot{\varphi}\sin^2\varphi - r\ddot{\varphi}\sin^2\varphi - r\dot{\varphi}^2\sin\varphi\cos\varphi\,,$$
$$\frac{N}{m}\cos^2\varphi - g\cos\varphi = \ddot{r}\sin\varphi\cos\varphi + 2\dot{r}\dot{\varphi}\cos^2\varphi + r\ddot{\varphi}\cos^2\varphi - r\dot{\varphi}^2\sin\varphi\cos\varphi\,.$$

Nyní odečteme první rovnici od druhé

$$\frac{N}{m} - g\cos\varphi = 2\dot{r}\dot{\varphi} + r\ddot{\varphi}\,. \tag{8}$$

Tuto rovnici vynásobíme $\sin\varphi$ a sečteme ji s rovnicí (6) vydělenou $m$. Výsledek této operace ještě vydělíme $\cos\varphi$ a dostaneme

$$-g\sin\varphi = \ddot{r} - r\dot{\varphi}^2\,. \tag{9}$$

Soustavu rovnic (6) a (7) jsme tak zjednodušili na soustavu rovnic (8) a (9). K nalezení pohybových rovnic v takto jednoduchém tvaru bylo potřeba s rovnicemi manipulovat způsobem, který nemusí být na první pohled zřejmý. Ukážeme si proto alternativní postup jejich odvození. Na místo vektorové báze $(\mathbf{e}_x, \mathbf{e}_y)$ budeme pracovat s bází $(\mathbf{e}_r, \mathbf{e}_\varphi)$. Bude to sice vyžadovat jisté matematické operace navíc, za to však dostaneme pohybové rovnice přímo v jednoduchém tvaru.

*Alternativní odvození pohybových rovnic*

Poloha kvádříku je tedy dána funkcemi $r = r(t)$ a $\varphi = \varphi(t)$. Vektor rychlosti je proto roven

$$\mathbf{v} = \frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t}\frac{\boldsymbol{\partial}}{\boldsymbol{\partial} r} + \frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}t}\frac{\boldsymbol{\partial}}{\boldsymbol{\partial}\varphi} \equiv \dot{r}\boldsymbol{\partial}_r + \dot{\varphi}\boldsymbol{\partial}_\varphi\,, \tag{10}$$

kde $\frac{\boldsymbol{\partial}}{\boldsymbol{\partial} r} \equiv \boldsymbol{\partial}_r$, resp. $\frac{\boldsymbol{\partial}}{\boldsymbol{\partial}\varphi} \equiv \boldsymbol{\partial}_\varphi$ jsou vektory tečné k souřadnicovým čárám $\varphi =$ konst, resp. $r =$ = konst. Vektory $\boldsymbol{\partial}_r$ jsou normalizované na jednotku $(\boldsymbol{\partial}_r^2 \equiv \boldsymbol{\partial}_r \cdot \boldsymbol{\partial}_r = 1)$ a proto jsou v každém bodě shodné s jednotkovým vektorem $\mathbf{e}_r$ mířícím v radiálním směru, tj.

$$\boldsymbol{\partial}_r = \mathbf{e}_r\,.$$

Vektory $\boldsymbol{\partial}_\varphi$ mířící v tangenciálním směru však už nejsou normalizované na jednotku, neboť $\boldsymbol{\partial}_\varphi^2 \equiv \boldsymbol{\partial}_\varphi \cdot \boldsymbol{\partial}_\varphi = r^2$. Místo nich proto budeme používat normalizované vektory $\mathbf{e}_\varphi$, pro které v každém bodě platí

$$\boldsymbol{\partial}_\varphi = r\mathbf{e}_\varphi\,.$$

Rychlost $\mathbf{v}$ z rovnice (10) přepíšeme do tvaru

$$\mathbf{v} = \frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t}\mathbf{e}_r + r\frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}t}\mathbf{e}_\varphi\,, \tag{11}$$

ve kterém rozeznáváme člen odpovídající radiální rychlosti a člen odpovídající tangenciální rychlosti. Zrychlení kvádříku $\mathbf{a}$ získáme totální časovou derivací vektoru rychlosti $\mathbf{v}$. Teď ovšem musíme být obezřetní. Bázové vektory na pravé straně rovnice (11) jsou závislé na čase $t$, protože se vyčíslují v bodech, které odpovídají poloze kvádříku v daném čase. Totální časovou derivací rovnice (11) dostaneme

$$\mathbf{a} = \frac{\mathrm{d}^2 r}{\mathrm{d}t^2}\mathbf{e}_r + \frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t}\frac{\mathrm{d}\mathbf{e}_r}{\mathrm{d}t} + \frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t}\frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}t}\mathbf{e}_\varphi + r\frac{\mathrm{d}^2\varphi}{\mathrm{d}t^2}\mathbf{e}_\varphi + r\frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}t}\frac{\mathrm{d}\mathbf{e}_\varphi}{\mathrm{d}t}\,. \tag{12}$$

Časovou změnu bázových vektorů podél trajektorie vyjádříme pomocí změny bázových vektorů v souřadnicových směrech a pomocí časové změny souřadnic polohy kvádříku, neboli aplikujeme pravidlo o derivaci složené funkce na vektory

$$\frac{\mathrm{d}\mathbf{e}_r}{\mathrm{d}t} = \frac{\partial\mathbf{e}_r}{\partial t} + \frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t}\frac{\partial\mathbf{e}_r}{\partial r} + \frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}t}\frac{\partial\mathbf{e}_r}{\partial\varphi}\,, \tag{13}$$

$$\frac{\mathrm{d}\mathbf{e}_\varphi}{\mathrm{d}t} = \frac{\partial\mathbf{e}_\varphi}{\partial t} + \frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t}\frac{\partial\mathbf{e}_\varphi}{\partial r} + \frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}t}\frac{\partial\mathbf{e}_\varphi}{\partial\varphi}\,. \tag{14}$$

Parciální derivace obou bázových vektorů podle času jsou nulové, neboť v pevné poloze nezávisí bázové vektory na čase. Začneme se členem $\partial \mathbf{e}_r/\partial\varphi$, neboli se změnou vektoru $\mathbf{e}_r$ podél souřadnice $\varphi$. K nalezení výsledku nám pomůže obrázek 2. V bodě o souřadnicích $(r,\varphi)$ máme vektor $\mathbf{e}_r(r,\varphi)$ a v bodě pootočeném o malý úhel $\delta\varphi$ máme vektor $\mathbf{e}_r(r,\varphi+\delta\varphi)$. Vzhledem k tomu, že směřujeme k derivaci, chceme od sebe tyto vektory odečíst. Umíme však odečítat pouze vektory v jednom bodě, a proto vektor $\mathbf{e}_r(r,\varphi+\delta\varphi)$ paralelně přeneseme z bodu $(r,\varphi+\delta\varphi)$ do bodu $(r,\varphi)$ a získáme tak nový vektor $\mathbf{e}_r(r,\varphi+\delta\varphi)'$. V bodě $(r,\varphi)$ už je dobře definovaný rozdíl $\mathbf{e}_r(r,\varphi+\delta\varphi)' - \mathbf{e}_r(r,\varphi)$. Jeho výsledkem je vektor, jehož velikost je $2\sin(\delta\varphi/2)$. Budeme-li úhel $\delta\varphi$ limitně zmenšovat k nule, dostaneme vektor mířící ve směru $\mathbf{e}_\varphi(r,\varphi)$. Zároveň pro malé úhly $\delta\varphi$ platí přiblížení $2\sin(\delta\varphi/2)\approx\delta\varphi$, proto celkově dostáváme

$$\frac{\partial \mathbf{e}_r(r,\varphi)}{\partial\varphi} \equiv \lim_{\delta\varphi\to 0} \frac{\mathbf{e}_r(r,\varphi+\delta\varphi)' - \mathbf{e}_r(r,\varphi)}{\delta\varphi} = \mathbf{e}_\varphi(r,\varphi)\ .$$

Zjednodušeně zapsáno jsme získali

$$\frac{\partial \mathbf{e}_r}{\partial\varphi} = \mathbf{e}_\varphi\ .$$

Se členem $\partial\mathbf{e}_\varphi/\partial\varphi$ budeme postupovat opět s pomocí obrázku 2. Postup je analogický, a proto ho ponecháme bez slovního komentáře. Výsledkem je vztah

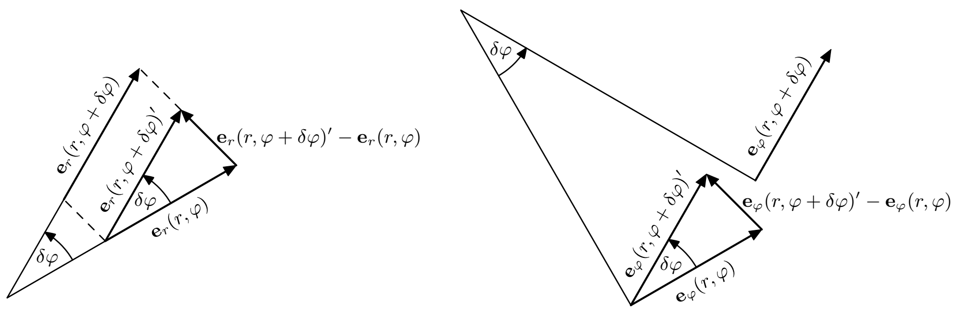
$$\frac{\partial \mathbf{e}_\varphi}{\partial\varphi} = -\mathbf{e}_r\ .$$

Vybaveni zkušenostmi z příkladů výše již snadno nahlédneme, že následující parciální derivace jsou nulové

$$\frac{\partial \mathbf{e}_r}{\partial r} = 0 = \frac{\partial \mathbf{e}_\varphi}{\partial r}\ .$$

Pro totální časové derivace bázových vektorů (rovnice (13) a (14)) tak dostáváme

$$\frac{\mathrm{d}\mathbf{e}_r}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}t}\mathbf{e}_\varphi\,,$$
$$\frac{\mathrm{d}\mathbf{e}_\varphi}{\mathrm{d}t} = -\frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}t}\mathbf{e}_r\,.$$




Obr. 2: Odvození parciálních derivací bázových vektorů v polárních souřadnicích.

Na základě předchozích výpočtů se nám rovnice (12) pro zrychlení **a** zjednoduší na

$$\mathbf{a} = \left(\ddot{r} - r\dot{\varphi}^2\right)\mathbf{e}_r + \left(2\dot{r}\dot{\varphi} + r\ddot{\varphi}\right)\mathbf{e}_\varphi\,.$$

Jedná se o obecný tvar zrychlení při pohybu v rovině vyjádřený v polárních souřadnicích. Jako cvičení se můžete sami pokusit interpretovat každý jednotlivý člen na pravé straně. Výslednou sílu **F** působící na kvádřík lze zapsat ve tvaru

$$\mathbf{F} = -\left(mg\sin\varphi\right)\mathbf{e}_r + \left(N - mg\cos\varphi\right)\mathbf{e}_\varphi\,.$$

Z druhého Newtonova pohybového zákona pak dostáváme soustavu pohybových rovnic přímo v jednoduché formě – rovnice (8) a (9).

### *Řešení pohybových rovnic*

Pokračujeme v hledání pohybu kvádříku. Ze zadání známe pohyb desky a tedy souřadnici kvádříku $\varphi = \omega t$. Dosazením do pohybových rovnic (8) a (9) dostaneme

$$\frac{N}{m} - g\cos\omega t = 2\omega\dot{r}\,, \tag{15}$$

$$-g\sin\omega t = \ddot{r} - \omega^2 r\,. \tag{16}$$

Rovnice (16) je sama o sobě nehomogenní lineární obyčejnou diferenciální rovnicí druhého řádu pro funkci $r(t)$. Její řešení se skládá z homogenního a partikulárního řešení. Homogenní řešení hledáme ve tvaru

$$r_\mathrm{H}(t) = A\mathrm{e}^{\omega t} + B\mathrm{e}^{-\omega t}\,,$$

kde $A$, $B$ jsou konstanty. Pomocí převodních vztahů mezi exponenciálou a hyperbolickými funkcemi jej můžeme přepsat do (pro následující výpočty) výhodnější podoby

$$r_\mathrm{H}(t) = a\sinh\omega t + b\cosh\omega t\,,$$

kde $a$, $b$ jsou konstanty. Partikulárním řešením je například

$$r_\mathrm{P}(t) = \frac{g}{2\omega^2}\sin\omega t\,.$$

Tím jsme našli obecné řešení

$$r(t) = r_\mathrm{H}(t) + r_\mathrm{P}(t) = a\sinh\omega t + b\cosh\omega t + \frac{g}{2\omega^2}\sin\omega t\,, \tag{17}$$

odkud pro první časovou derivaci získáme

$$\frac{\dot{r}(t)}{\omega} = a\cosh\omega t + b\sinh\omega t + \frac{g}{2\omega^2}\cos\omega t\,. \tag{18}$$

Označme počáteční vzdálenost od osy otáčení $r_0 = r(0)$. Ze zadání vyplývá, že kvádřík se po desce ze začátku nepohybuje, neboli $\dot{r}(0) = 0$. Dosazením počátečních podmínek do rovnic (17) a (18) dostaneme

$$r_0 = b\,,\quad 0 = a + \frac{g}{2\omega^2}\,. \tag{19}$$

Pohyb po desce je tedy dán rovnicí

$$r(t) = r_0\cosh\omega t + \frac{g}{2\omega^2}\left(\sin\omega t - \sinh\omega t\right)\,. \tag{20}$$

*Podmínka pádu kvádříku z desky*

Teď nás bude zajímat kam kvadřík umístit, aby z desky vyletěl po čtvrtině otáčky, kdy $\varphi = \pi/2$. To může nastat dvěma způsoby. Na kvádřík působí deska pouze tlakovou silou ($N > 0$), a proto kvádřík může odletět od desky v okamžiku, kdy tato síla v čase spojitě vymizí ($N = 0$). Jednoduše deska nebude dost rychlá na to, aby dohonila kvádřík. Druhou možností je, že kvádřík právě po čtvrtině otáčky dojede na konec desky.

Předpokládáme-li, že je deska dostatečně dlouhá, vyletí kvádřík z desky v okamžiku, kdy na něj přestane silově působit, tj. když bude platit $N = 0$. Navíc, aby kvádřík skutečně odletěl, požadujeme, aby čistě matematicky v tomto bodě přecházelo $N$ do záporných hodnot. Fyzikálně korektněji požadujeme, aby mělo $N$ v daném okamžiku zápornou časovou derivaci zleva. Dosazením nalezeného řešení (20) do první pohybové rovnice (15) dostaneme

$$\frac{N(t)}{m} = 2r_0\omega^2 \sinh \omega t - g\cosh \omega t + 2g\cos \omega t\,. \tag{21}$$

Z požadavku, aby kvádřík vyletěl po čtvrtině otáčky, máme podmínku

$$0 = 2r_0\omega^2 \sinh \frac{\pi}{2} - g\cosh \frac{\pi}{2} \quad \Rightarrow \quad r_0 = \frac{g}{2\omega^2} \coth \frac{\pi}{2}\,. \tag{22}$$

Dostáváme tak výslednou závislost vzdálenosti kvádříku od osy otáčení

$$\begin{aligned} r(t) &= \frac{g}{2\omega^2}\left(\coth \frac{\pi}{2} \cosh \omega t - \sinh \omega t + \sin \omega t\right)\,, \\ \dot r(t) &= \frac{g}{2\omega}\left(\coth \frac{\pi}{2} \sinh \omega t - \cosh \omega t + \cos \omega t\right)\,. \end{aligned} \tag{23}$$

Všimněme si, že $\dot r(\varphi = \pi/2) = 0$, což znamená, že kvádřík bude vystřelen ve vodorovném směru. Stále však nemáme zaručeno, že nám v průběhu čtvrtotáčky nepřekmitne $N$ do záporných hodnot. Pro velikost reakce $\mathbf{N}$ desky na kvádřík podle rovnice (21) platí

$$\frac{N(t)}{mg} = \coth \frac{\pi}{2} \sinh \omega t - \cosh \omega t + 2\cos \omega t\,. \tag{24}$$

Ověříme si, že na začátku ($t = 0$) je $N(0) = mg > 0$. Pro $\omega t \in (0, \pi/2)$ se o tom přesvědčíme s pomocí grafu 3. Vidíme, že funkce je pro $\omega t \in (0, \pi/2)$ kladná a že v bodě $\omega t = \pi/2$ má zápornou derivaci, což lze ukázat i výpočtem. Platí

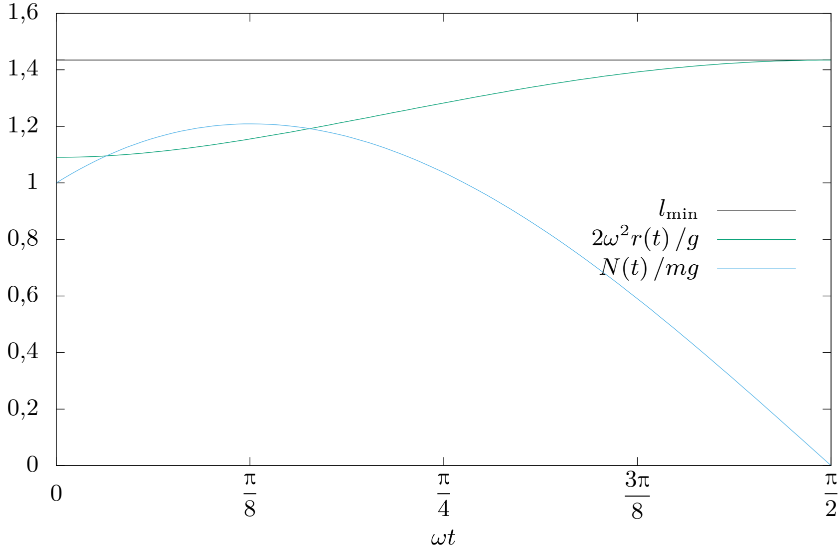
$$\begin{aligned} \frac{1}{mg}\frac{\mathrm{d}N}{\mathrm{d}\,(\omega t)}\left(\frac{\pi}{2}\right) &= \coth \frac{\pi}{2} \cosh \frac{\pi}{2} - \sinh \frac{\pi}{2} - 2 = \frac{1}{\sinh \frac{\pi}{2}}\left(\cosh^2 \frac{\pi}{2} - \sinh^2 \frac{\pi}{2}\right) - 2 = \\ &= \frac{1}{\sinh \frac{\pi}{2}} - 2 < 0\,, \end{aligned}$$

takže kvádřík od desky skutečně odletí.

Další nutná podmínka proto, aby kvádřík nevyletěl dříve, je dostatečná délka desky v radiálním směru. Její minimální délka $l_{\min}$ musí být rovna vzdálenosti, do jaké se kvádřík po čtvrtině otáčce dostane. Dosadíme do vztahu (23) a vyjde nám

$$l_{\min} = r\left(\varphi = \frac{\pi}{2}\right) = \frac{g}{2\omega^2}\left(\coth \frac{\pi}{2} \cosh \frac{\pi}{2} - \sinh \frac{\pi}{2} + 1\right) = \frac{g}{2\omega^2}\left(\frac{1}{\sinh \frac{\pi}{2}} + 1\right)\,. \tag{25}$$

Délka desky $l_{\min}$ je skutečně postačující, neboť, jak je patrné z grafu 3, v průběhu celé čtvrtotáčky je $0 < r(t) \leq l_{\min}$. Poznamenejme ještě, že kdyby byla deska příliš dlouhá, mohla by do kvádříku po vystřelení znovu narazit. Zařízení by pak úkol katapultu příliš nesplňovalo.




Obr. 3: Funkce $N(t)$ a $r(t)$ během první čtvrtotáčky desky.

### *Podmínka druhého způsobu pádu kvádříku z desky*

Podívejme se na situaci, kdy kvádřík dojede po čvrtině otáčky na konec desky, jejíž délku v radiálním směru označíme $l$. Dostáváme podmínku

$$r\left(\varphi = \frac{\pi}{2}\right) = l = r_0 \cosh\frac{\pi}{2} + \frac{g}{2\omega^2}\left(1 - \sinh\frac{\pi}{2}\right) .$$

Odtud máme pro počáteční vzdálenost vztah

$$r_0 = \frac{l + \frac{g}{2\omega^2}\left(\sinh\frac{\pi}{2} - 1\right)}{\cosh\frac{\pi}{2}} > 0 . \tag{26}$$

Pro úplnost uvedeme plnou závislost radiální vzdálenosti na čase

$$r(t) = \frac{l + \frac{g}{2\omega^2}\left(\sinh\frac{\pi}{2} - 1\right)}{\cosh\frac{\pi}{2}} \cosh\omega t + \frac{g}{2\omega^2}\left(\sin\omega t - \sinh\omega t\right) . \tag{27}$$

Ovšem řešení (27) není vždy smysluplné. Vzhledem ke konečné délce desky musí po celou čtvrtotáčku platit $r(t) \le l$. Pro $\varphi = \omega t \in \langle 0, \pi/2 \rangle$ přepíšeme tuto nerovnost do tvaru

$$\left(1 - \frac{\cosh\varphi}{\cosh\frac{\pi}{2}}\right)\tilde{l} \ge \left(\sinh\frac{\pi}{2} - 1\right)\frac{\cosh\varphi}{\cosh\frac{\pi}{2}} + (\sin\varphi - \sinh\varphi)\ , \tag{28}$$

kde jsme zavedli bezrozměrný parametr $\tilde{l} = 2l\omega^2/g$. Hledáme tedy nejmenší hodnotu parametru $\tilde{l}$, pro který je nerovnost splněna pro všechna $\varphi \in \langle 0, \pi/2 \rangle$, což není zrovna jednoduché. Začneme proto nutnou, avšak ne nutně postačující, podmínkou $\dot{r}(\varphi = \pi/2) \ge 0$. Zderivováním (27) a dosazením $\varphi = \pi/2$ dostaneme

$$\left(l + \frac{g}{2\omega^2}\left(\sinh\frac{\pi}{2} - 1\right)\right)\frac{\sinh\frac{\pi}{2}}{\cosh\frac{\pi}{2}} - \frac{g}{2\omega^2}\cosh\frac{\pi}{2} \ge 0\,.$$

Tuto nerovnost převedeme ekvivalentními úpravami na podmínku

$$\tilde{l} \ge 1 + \frac{1}{\sinh\frac{\pi}{2}}\,. \tag{29}$$

Zkusme nyní zjistit, zda je nutná podmínka (29) zároveň postačující, tj. zda $\tilde{l}$ splňující (29) splňuje také $r(t) \le l$. Ptáme se tedy, zda je splněna nerovnost

$$\left(1 - \frac{\cosh\varphi}{\cosh\frac{\pi}{2}}\right)\left(1 + \frac{1}{\sinh\frac{\pi}{2}}\right) \ge \left(\sinh\frac{\pi}{2} - 1\right)\frac{\cosh\varphi}{\cosh\frac{\pi}{2}} - (\sinh\varphi - \sin\varphi)\ .$$

Roznásobením a dalšími úpravami dostaneme

$$1 + \sinh\frac{\pi}{2} - \sinh\frac{\pi}{2}\sin\varphi \ge \cosh\frac{\pi}{2}\cosh\varphi - \sinh\frac{\pi}{2}\sinh\varphi\,.$$

Použitím součtového vzorce $\cosh(x+y) = \cosh x \cosh y + \sinh x \sinh y$ a přičtením $\sinh\frac{\pi}{2}\sin\varphi$ převedeme nerovnost na tvar

$$1 + \sinh\frac{\pi}{2} \ge \cosh\left(\frac{\pi}{2} - \varphi\right) + \sinh\frac{\pi}{2}\sin\varphi\,. \tag{30}$$

Definujme funkci $P(\varphi)$ jako levou stranu této nerovnosti. Její maximum na intervalu $\langle 0, \pi/2 \rangle$ se nachází buď na krajích tohoto intervalu, nebo ve stacionárních bodech $P' = 0$. Derivací dostáváme podmínku pro stacionární body

$$P' \equiv \frac{\mathrm{d}P}{\mathrm{d}\varphi} = -\sinh\left(\frac{\pi}{2} - \varphi\right) + \sinh\frac{\pi}{2}\cos\varphi = 0\,.$$

Tato rovnice má na hledaném intervalu dvě řešení a sice 0 a $\pi/2$. Dosazením těchto hodnot do $P(\varphi)$ se přesvědčíme, že maximum $P$ je rovno $P(\pi/2) = 1 + \sinh\pi/2$. Vidíme, že nerovnost (30) je tak splněna. Zjistili jsme, že pro

$$\tilde{l} \ge 1 + \frac{1}{\sinh\frac{\pi}{2}} \tag{31}$$

je řešení pohybu s počáteční vzdáleností $r_0$ danou rovnicí (26) smysluplné, neboli (31) je postačující podmínkou pro $r(t) \le l$. Vypadá to tedy tak, že i v případě druhé možnosti vystřelení kvádříku existuje pro pevné $\omega$ minimální potřebná délka desky, která je shodná s délkou potřebnou pro první možnost, viz vztah (25). Zbývá však ještě ověřit, že kvádřík neodletí od desky dříve, neboli že platí $N(\varphi) \geq 0$. Dosazení za $r_0$ z rovnice (26) do (21) vede na

$$\frac{N(t)}{mg} = \frac{\tilde{l} + \left(\sinh\frac{\pi}{2} - 1\right)}{\cosh\frac{\pi}{2}} \sinh\varphi - \cosh\varphi + 2\cos\varphi\,. \tag{32}$$

A protože platí (31), musí také platit

$$\frac{N(t)}{mg} \geq \frac{1 + \sinh^{-1}\frac{\pi}{2} + \left(\sinh\frac{\pi}{2} - 1\right)}{\cosh\frac{\pi}{2}} \sinh\varphi - \cosh\varphi + 2\cos\varphi\,.$$

Společně s požadavkem $N(\varphi) > 0$ to vede na podmínku

$$\coth\frac{\pi}{2}\sinh\varphi - \cosh\varphi + 2\cos\varphi \geq 0\,.$$

Pro tuto nerovnost jsme již ověřili, že je pro všechna $\varphi \in \langle 0, \pi/2\rangle$ splněna, viz (24).

### *Bonus*

Dalším úkolem je zjistit mechanický výkon $P$ dodávaný kvádříku deskou. Deska působí na kvadřík silou $\mathbf{N}$, a proto

$$P = \mathbf{N}\cdot\mathbf{v} = N\mathbf{e}_\varphi \cdot (\dot{r}\mathbf{e}_r + r\dot{\varphi}\mathbf{e}_\varphi) = Nr\dot{\varphi}\,,$$

kde jsme využili rovnice (11) a ortonormality bázových vektorů. Ke stejnému vztahu můžeme také dojít z jiného úhlu pohledu. Deska působí na kvádřík momentem síly

$$\mathbf{M} = r\mathbf{e}_r \times N\mathbf{e}_\varphi = Nr\left(\mathbf{e}_r \times \mathbf{e}_\varphi\right)$$

a kvádřík se otáčí s vektorem úhlové rychlosti $\boldsymbol{\omega} = \dot{\varphi}\left(\mathbf{e}_r \times \mathbf{e}_\varphi\right)$. Výkon $P$ je pak roven

$$P = \mathbf{M}\cdot\boldsymbol{\omega} = Nr\dot{\varphi}\,. \tag{33}$$

V případě první možnosti vystřelení kvádříku dosadíme $\dot{\varphi} = \omega$, $N$ z rovnice (24) a $r$ z rovnice (23), čímž dostaneme výkon

$$P = \frac{mg^2}{2\omega}\left(\coth\frac{\pi}{2}\sinh\omega t - \cosh\omega t + 2\cos\omega t\right)\left(\coth\frac{\pi}{2}\cosh\omega t - \sinh\omega t + \sin\omega t\right)\,.$$

Celková práce $W$ vykonaná na kvádříku je rovna přírůstku mechanické energie kvádříku, tj. součtu přírůstku kinetické energie $E_\mathrm{k}$ a přírůstku tíhové potenciální energie $E_\mathrm{p}$, neboli

$$\begin{aligned} W &= E_\mathrm{k}\left(\varphi = \frac{\pi}{2}\right) - E_\mathrm{k}(\varphi = 0) + E_\mathrm{p}\left(\varphi = \frac{\pi}{2}\right) - E_\mathrm{p}(\varphi = 0) = \\ &= \frac{1}{2}m\left(\mathbf{v}^2(\varphi = \pi/2) - \mathbf{v}^2(\varphi = 0)\right) + mgl_\mathrm{min}\,. \end{aligned}$$

Za rychlost $\mathbf{v}$ dosadíme z rovnice (11) a dostaneme

$$W = \frac{1}{2}m\left(\dot{r}^2\left(\varphi = \frac{\pi}{2}\right) + \left(l_\mathrm{min}\omega\right)^2 - \left(r_0\omega\right)^2\right) + mgl_\mathrm{min}\,.$$

Nyní za $r_0$ a $l_{\min}$ dosadíme z rovnic (22) a (25) a využijeme toho, že $\dot{r}(\varphi = \pi/2) = 0$, čímž získáme hledaný vztah pro vykonanou práci

$$W = \frac{mg^2}{8\omega^2}\left(\left(\frac{1}{\sinh\frac{\pi}{2}} + 1\right)^2 - \coth^2\frac{\pi}{2}\right) + \frac{mg^2}{2\omega^2}\left(\frac{1}{\sinh\frac{\pi}{2}} + 1\right) = $$
$$= \frac{mg^2}{2\omega^2}\left(\frac{3}{2\sinh\frac{\pi}{2}} + 1\right).$$

Ke stejnému výsledku lze dojít i přímou integrací výkonu $P$. Jedná se však o delší výpočet.

V případě druhé možnosti vystřelení kvádříku dosadíme do rovnice (33) opět $\dot{\varphi} = \omega$, $N$ z rovnice (32) a $r$ z rovnice (27), čímž dostaneme výkon

$$P = \frac{mg^2}{2\omega}\left(\frac{\tilde{l} + \sinh\frac{\pi}{2} - 1}{\cosh\frac{\pi}{2}}\sinh\varphi - \cosh\varphi + 2\cos\varphi\right)\left(\frac{\tilde{l} + \sinh\frac{\pi}{2} - 1}{\cosh\frac{\pi}{2}}\cosh\varphi + \sin\varphi - \sinh\varphi\right).$$

Celková práce $W$ vykonaná na kvádříku bude rovna

$$W = \frac{1}{2}m\left(\mathbf{v}^2(\varphi = \pi/2) - \mathbf{v}^2(\varphi = 0)\right) + mgl\,.$$

Dosazením za rychlost $\mathbf{v}$ z rovnice (11) dostaneme

$$W = \frac{1}{2}m\left(\dot{r}^2\left(\varphi = \frac{\pi}{2}\right) + (l\omega)^2 - (r_0\omega)^2\right) + mgl\,.$$

Zbývá už jen dosadit s užitím rovnice (27) pro $r$ a rovnice (26) pro $r_0$.

***Václav Mikeska***
`v.mikeska@fykos.cz`