Úloha IV.1 ... dvě kapky

3 body; (chybí statistiky)

Od vodovodního kohoutku se těsně za sebou odtrhnou dvě kapky a začnou padat dolů. Jak se bude jejich vzájemná vzdálenost měnit v čase? Odpor vzduchu zanedbejte.
Bonus Odpor vzduchu započítejte, odhadněte potřebné parametry a určete vzdálenost kapek po dlouhé době.
Karel se hypnotizoval vodou.

Pro jednoduchost předpokládejme, že kapky jsou stejně velké koule. Stejná velikost plyne z toho, že velikost kapky je dána zejména tvarem místa, odkud se odtrhává, a hodnotou povrchového napětí kapaliny, z níž je tvořena. Obě veličiny jsou u obou kapek stejné a jejich poloměr r tak bude také stejný.[1] To, že kapky padají ve tvaru velmi blízkém kouli, se dá pozorovat na zpomalených záznamech rychloběžných kamer.[2]

Obě kapky padají v homogenním tíhovém poli se zrychlením g. Uvažujeme, že kapky jsou v okamžiku odtržení v klidu a od té chvíle padají rovnoměrně zrychleným pohybem

$$h = \frac{1}{2}gt^2\,,$$

kde h je hloubka, ve které se kapka nachází v čase t po odtržení.

Začněme měřit čas t od chvíle, kdy se uvolní druhá kapka a první kapka je o h_0 níže. Kapky by se neměly dotýkat, tedy $h_0 > 2r$, kde r je poloměr kapky. Pokud bychom uvažovali vzdálenost $h_0 = 2r$, pak by se kapky kvůli povrchovému napětí slily. Ve skutečnosti trvá nějakou dobu než se druhá kapka zformuje, což znamená, že počáteční vzdálenost bude skutečně vyšší. Pro vzdálenost těžišť kapek v závislosti na času platí

$$\Delta h = h_1 - h_2 = \frac{1}{2}g\left(t_1^2 - t_2^2\right) = \frac{1}{2}g\left(\left(t_2 + \sqrt{\frac{2h_0}{g}}\right)^2 - t_2^2\right) =$$

$$= \frac{1}{2}g\left(2t_2\sqrt{\frac{2h_0}{g}} + \frac{2h_0}{g}\right) = t_2\sqrt{2gh_0} + h_0\,,$$

kde jsme číselným indexem označili veličiny odpovídající jednotlivým kapkám. Doba, kterou padá druhá kapka je ale shodná s dobou, kterou chceme měřit. Když ještě odečteme z předchozího výsledku rozměry kapek, abychom dostali jejich vzdálenost, vidíme, že se zvyšuje s rostoucím časem lineárně dle vztahu

$$D = t\sqrt{2gh_0} + h_0 - 2r\,.$$

Bonus

Pro použití standardních vzorců pro odporovou sílu je potřeba, aby vzdálenost kapek mezi sebou byla dostatečně vysoká. Vzorce zpravidla předpokládají, že okolní odporové prostředí je v klidu a předmět pohybující se skrz něj nutí okolní látku k obtékání. V realitě průchod prvního tělesa tekutinou způsobí, že se tekutina rozpohybuje a obvykle je pro druhý předmět o něco jednodušší pohybovat se tímto prostředím, tedy je mu kladen menší odpor (odporová síla). Toho využívají hejna hus i cyklisti. Efekt se dá v silnější formě ukázat na experimentu s pírkem a knihou. Zkuste upustit nejdříve samotnou knihu a pak samotné pírko a sledujte, jak rychle

[1] Pokud se na daný problém podíváme detailně, můžeme zjistit, že se za velkou kapkou, kvůli kmitání povrchu vody, utrhne ještě další menší kapka. To můžeme pozorovat například na videu `https://youtu.be/c4MUTij8f6I`. Zajímejme se pouze o „velké“ kapky, které by měly být prakticky stejně velké.

[2] Jak ve videu z minulé poznámky, tak i na dalším `https://youtu.be/lLYhkU6tMA8`.

padají tyto předměty k zemi zvlášť. Zkuste pak položit pírko na knihu a upusťte je současně. Pokud pírko nesfoukne boční poryv větru, pak spadnou na zem společně.

Nyní bychom měli zvážit, který odporový vztah použít. První variantou je Stokesův vzorec

$$F_\mathrm{S} = 6\pi\eta r v\,,$$

kde η je dynamická viskozita charakterizující vnitřní tření tekutiny a v rychlost tělesa. Stokesův vzorec funguje pro koule, které jsou laminárně obtékané tekutinou. Jinak řečeno, rychlost pohybu tekutiny okolo kapky by musela být taková, aby nevznikaly víry, což platí pro malé rychlosti.

Alternativou je Newtonův vztah

$$F_\mathrm{N} = \frac{1}{2} C S \rho v^2\,,$$

kde ρ je hustota tekutiny, C je bezrozměrný součinitel odporu, který závisí na tvaru tělesa, a S je příčný průřez tělesa. Ten funguje dobře pro vyšší rychlosti, kde nastává turbulentní proudění. Má ovšem také limity – při dalším zvyšováním rychlosti, typicky pro ty blízké rychlosti zvuku v daném prostředí, odpor začne růst ještě prudčeji než s kvadrátem rychlosti. Po překročení rychlosti zvuku pak odpor v nějaké oblasti rychlostí klesá, než opět začne růst. Tento „detail“ se nás ale netýká, protože kapka se na takovou rychlost neurychlí.

Určeme, na jakých maximálních rychlostech by se ustálila kapka o poloměru $r = 1{,}0\,\mathrm{mm}$, pokud by se pohybovala podle jednotlivých vztahů. Při ustálení rychlosti se vyrovná odporová síla s tíhovou $F_g = mg$. Dosazovat budeme parametry $\eta = 1{,}8\cdot 10^{-5}\,\mathrm{Pa{\cdot}s}$, $\rho = 1{,}29\,\mathrm{kg{\cdot}m^{-3}}$, $C = 0{,}50$ a hustotu kapky $\rho_\mathrm{k} = 1{,}00\cdot 10^3\,\mathrm{kg{\cdot}m^{-3}}$. Pro hmotnost použijeme vztah $m = \rho_\mathrm{k} V$, kde $V = 4\pi r^3/3$ je objem koule a $S = \pi r^2$ její průřez.

$$\begin{aligned}
F_\mathrm{S} = F_g \quad &\Rightarrow \quad 6\pi\eta r v_\mathrm{S} = \frac{4}{3}\pi r^3 \rho_\mathrm{k} g\,,\\
&\qquad\qquad v_\mathrm{S} = \frac{2 g \rho_\mathrm{k} r^2}{9\eta}\frac{g}{\eta} \approx 120\,\mathrm{m{\cdot}s^{-1}}\,,\\
F_\mathrm{N} = F_g \quad &\Rightarrow \quad \frac{1}{2} C S \rho v_\mathrm{N}^2 = \frac{4}{3}\pi r^3 \rho_\mathrm{k} g\,,\\
&\qquad\qquad v_\mathrm{N} = \sqrt{\frac{8 g \rho_\mathrm{k} r}{3 C \rho}} \approx 6\,\mathrm{m{\cdot}s^{-1}}\,.
\end{aligned}$$

Jak ale odhadnout, který vzorec by měl být vhodnější? To můžeme rozlišit například s pomocí výpočtu Reynoldsova čísla. Pro kouli pohybující vazkou tekutinou je[3]

$$\mathrm{Re} = \frac{2 r v \rho_\mathrm{k}}{\eta}\,.$$

Zkusíme-li dosadit nižší z rychlostí v_N, dostáváme řádově $7\cdot 10^5$ a pro v_S by hodnota Reynoldsova čísla byla ještě vyšší. To odpovídá silně turbulentnímu pohybu. Hranice laminárního a turbulentního proudění není úplně jasně definovaná – avšak hodnoty ve stovkách tisíc jednoznačně ukazují na turbulentní. Proto je zřejmě vhodnější využít Newtonův vztah pro kapky s podobným rozměrem.

[3] Viz např. Wikipedia – Reynolds number – Object in a fluid – Sphere in a fluid `https://en.wikipedia.org/wiki/Reynolds_number#Sphere_in_a_fluid`

Celkově je odpovědí na bonus pro tuto jednoduchou úlohu, že nejprve se obě kapky budou urychlovat se zrychlením prakticky stejným jako je tíhové. Tím, jak poroste jejich rychlost, se bude odporová síla zvyšovat. Tím bude zrychlení klesat. Rychlost kapky se bude stále zvyšovat a postupně se blížit terminální rychlosti v_N. Vhodnost využití odporového vzorce pro turbulentní proudění jsme si potvrdili výpočtem Reynoldsova čísla. Po delším čase bude vzdálenost mezi kapkami, které mají stejný poloměr, konstantní. Nejsnadněji ji můžeme vypočítat jako součin rychlosti a rozdílu času startu obou kapek, tedy

$$D = v_\mathrm{N}\left(t_1 - t_2\right) = t_0\sqrt{\frac{8g\rho_\mathrm{k}r}{3C\rho}}\,.$$

Proč takto snadno? Protože průběh pádu probíhal u obou kapek stejně, byl pouze posunutý v čase. Nechť po nějaké dostatečně dlouhé době (takové, aby se už kapky pohybovaly terminálními rychlostmi) proletí první kapka bodem h. Druhá jím zřejmě proletí o t_0 později. Jelikož se první pohybuje terminální rychlostí, urazí za tuto dobu vzdálenost $v_\mathrm{N}t_0$.

Co jsme neuvažovali a jak by bylo možné zpracování dále vylepšit? Zanedbali jsme vztlakovou sílu působící na kapky, ale ta je zhruba $800\times$ menší, než je tíhová. Tiše jsme předpokládali, že kapky padají z velké výšky a nedopadnou na zem a během pádu se nijak nebudou měnit. To nemusí být pravda, protože pádem v suchém vzduchu se bude kapka odpařovat, naopak při pádu v mlze by se její hmotnost a poloměr mohly zvyšovat. Současně ale padají v konstantních podmínkách – konstantní tíhové zrychlení, hustota vzduchu a další parametry, což by pro velice dlouhý pád neplatilo. Dále bychom se mohli více věnovat kapkám s různými poloměry. V tom případě bychom zjistili, že pokud bychom vypustili malou kapku a následně kapku větší, druhá by měla tendenci tu první „dohnat“ a pravděpodobně by se slily. Mohli bychom numericky či analyticky vypočítat vzdálenost kapek v každém čase. Pro dvě velice rychle za sebou padající kapky by pak mohlo být zajímavé numericky simulovat pohyb vzduchu kolem nich v průběhu jejich pádu. Ale to jsou komplikovanější problémy za hranicí bonusu jednoduché úlohy.

Karel Kolář
`karel@fykos.cz`