Úloha III.S ... elektron v poli

10 bodů; průměr 4,00; řešilo 16 studentů

Uvažujte částici s nábojem q a hmotností m, která je přichycená k pružině o tuhosti k, jejíž druhý konec je ukotven v jednom bodě. Předpokládejte, že pohyb částice je omezen na pohyb v jedné rovině. Celý systém je v magnetickém poli o velikosti B_0, které je kolmé na rovinu pohybu částice. Pokusíme se popsat možné oscilace této částice. Začněte sestavením rovnic pohybu pro tuto částici – nezapomňte započítat vliv magnetického pole.

Poté předpokládejte oscilující pohyb pro obě kartézské souřadnice částice, a proveďte Fourierovskou substituci, tj. nahraďte derivace násobky $i\omega$, kde ω je frekvence oscilací. Vyřešte výslednou soustavu rovnic tak, abyste získali poměr amplitud oscilací a frekvenci oscilací. Takto získané řešení je poměrně složité, a abychom mu lépe porozuměli, je vhodné přiblížit si ho v jednodušším případě. Předpokládejte tedy dále, že magnetické pole je velmi silné, tj. $\frac{q^2 B_0^2}{m^2} \gg \frac{k}{m}$. Určete přibližnou hodnotu (hodnoty) ω v této aproximaci, hledejte vždy nejvyšší nenulový řád přiblížení. Dále načrtněte pohyb (pohyby) částice v reálném prostoru při této aproximaci.

Štěpán chtěl vytvořit klasický diamagnet.

Na částici působí dvě síly. První silou působí pružina, která vrací částici zpět ke kotvícímu bodu. Zaveďme soustavu souřadnic s počátkem v tomto kotvícím bodě. Pozice částice je $\mathbf{r}$ a síla, kterou působí pružina, je tedy

$$\mathbf{F}_\mathrm{p} = -k\mathbf{r}\,.$$

Dále na částici působí Lorentzova síla

$$\mathbf{F}_\mathrm{L} = q\mathbf{v} \times \mathbf{B}\,,$$

kde $\mathbf{v}$ je rychlost částice. Rychlost částice lze vyjádřit jako derivaci pozice částice

$$\mathbf{v} = \frac{\mathrm{d}\mathbf{r}}{\mathrm{d}t}\,.$$

Nechť rovina, ve které se částice pohybuje, je rovinou xy naší soustavy souřadnic. Pak má vektor $\mathbf{B}$ nenulovou složku pouze ve směru z, a platí tedy

$$\mathbf{v} \times \mathbf{B} = \left(v_y B_z, -v_x B_z, 0\right)\,,$$

kde v_y je y-vá složka vektoru $\mathbf{v}$, a obdobně to je pro ostatní složky a vektory. Zaveďme nyní $\mathbf{r} = (x, y, 0)$ a označme velikost vektoru $\mathbf{B}$ jako $|\mathbf{B}| = B_z = B_0$. Pak

$$\mathbf{F}_\mathrm{L} = \left(qB_0\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}, -qB_0\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}, 0\right)\,.$$

Newtonův druhý zákon nám dá

$$\mathbf{F}_\mathrm{p} + \mathbf{F}_\mathrm{L} = m\frac{\mathrm{d}^2\mathbf{r}}{\mathrm{d}t^2}\,.$$

V komponentu x je tato rovnice

$$-kx + qB_0\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = m\frac{\mathrm{d}^2 x}{\mathrm{d}t^2}\,,$$

a v komponentu y pak

$$-ky - qB_0\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = m\frac{\mathrm{d}^2 y}{\mathrm{d}t^2}\,.$$

Pokud předpokládáme, že jak x, tak y s časem oscilují, lze psát

$$x = \alpha \mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega t}\,,$$
$$y = \beta \mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega t}$$

a můžeme tedy provést Fourierovskou substituci pro x

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = \mathrm{i}\omega x\,,$$
$$\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2} = -\omega^2 x$$

a obdobně pro y. Pohybové rovnice jsou tedy

$$-kx + \mathrm{i}\omega q B_0 y = -m\omega^2 x\,,$$
$$-ky - \mathrm{i}\omega q B_0 x = -m\omega^2 y\,.$$

Z první rovnice vyjádříme y

$$\mathrm{i}\omega q B_0 y = \left(k - m\omega^2\right) x\,.$$

Vydělením oscilačním faktorem, který je společný pro x i y, pak dostáváme

$$\mathrm{i}\omega q B_0 \beta = \left(k - m\omega^2\right) \alpha\,,$$
$$\beta = \frac{k - m\omega^2}{\mathrm{i}\omega q B_0}\alpha = -\mathrm{i}\frac{k - m\omega^2}{\omega q B_0}\alpha\,.$$

Získali jsme tedy poměr amplitud oscilací

$$\frac{\beta}{\alpha} = -\mathrm{i}\frac{k - m\omega^2}{\omega q B_0}\,.$$

Dosazením do druhé rovnice (a vydělením oscilačním faktorem) dostáváme

$$-k\beta - \mathrm{i}\omega q B_0 \alpha = -m\omega^2 \beta\,,$$
$$-\mathrm{i}\omega q B_0 \alpha = \left(k - m\omega^2\right)(-\mathrm{i})\frac{k - m\omega^2}{\omega q B_0}\alpha\,.$$

Při vydělení α můžeme získanou rovnici řešit pro ω

$$-\mathrm{i}\omega q B_0 = -\mathrm{i}\frac{\left(k - m\omega^2\right)^2}{\omega q B_0}\,,$$
$$q^2 B_0^2 \omega^2 = \left(k - m\omega^2\right)^2\,,$$
$$\pm q B_0 \omega = \left(k - m\omega^2\right)\,.$$

Vydělíme rovnici m a zavedeme $\omega_0^2 = \frac{k}{m}$ a $\omega_\mathrm{c} = \frac{qB_0}{m}$. Pak

$$\pm \omega_\mathrm{c} \omega = \omega_0^2 - \omega^2\,.$$

Tuto rovnici řešíme jako kvadratickou rovnici

$$\omega^2 \pm \omega_\mathrm{c}\omega - \omega_0^2 = 0\,,$$

$$\omega = \frac{\pm\omega_\mathrm{c} \pm' \sqrt{\omega_\mathrm{c}^2 + 4\omega_0^2}}{2}\,,$$

kde $\pm'$ je nezávislé na $\pm$. Aby byla frekvence kladné číslo, máme dvě možnosti; buď

$$\omega_1 = \sqrt{\frac{\omega_\mathrm{c}^2}{4} + \omega_0^2} - \frac{\omega_\mathrm{c}}{2} = \sqrt{\frac{q^2B_0^2}{4m^2} + \frac{k}{m}} - \frac{qB_0}{2m}$$

nebo

$$\omega_2 = \sqrt{\frac{\omega_\mathrm{c}^2}{4} + \omega_0^2} + \frac{\omega_\mathrm{c}}{2} = \sqrt{\frac{q^2B_0^2}{4m^2} + \frac{k}{m}} + \frac{qB_0}{2m}\,.$$

Nyní situaci zjednodušíme předpokladem ze zadání. Všimněme si, že z něj přímo plyne

$$\omega_\mathrm{c}^2 \gg \omega_0^2\,.$$

Pro frekvence tedy platí

$$\omega_1 = \frac{\omega_\mathrm{c}}{2}\sqrt{1 + 4\frac{\omega_0^2}{\omega_\mathrm{c}^2}} - \frac{\omega_\mathrm{c}}{2} \approx \frac{\omega_\mathrm{c}}{2}\left(1 + 2\frac{\omega_0^2}{\omega_\mathrm{c}^2}\right) - \frac{\omega_\mathrm{c}}{2}\,,$$

$$\omega_1 = \frac{\omega_0^2}{\omega_\mathrm{c}} = \frac{km}{mqB} = \frac{k}{qB_0}\,,$$

$$\omega_2 = \frac{\omega_\mathrm{c}}{2}\sqrt{1 + 4\frac{\omega_0^2}{\omega_\mathrm{c}^2}} + \frac{\omega_\mathrm{c}}{2} \approx \frac{\omega_\mathrm{c}}{2}\left(1 + 2\frac{\omega_0^2}{\omega_\mathrm{c}^2}\right) + \frac{\omega_\mathrm{c}}{2}\,.$$

Do prvního nenulového řádu lze tento výraz přiblížit jednoduše jako

$$\omega_2 = \omega_\mathrm{c} = \frac{qB_0}{m}\,.$$

Vidíme tedy, že frekvence ω_1 odpovídá pomalým oscilacím, zatímco frekvence ω_2 odpovídá spíše rychlejším oscilacím (rychlými oscilacemi myslíme ty s frekvencí okolo $\omega_\mathrm{c} \gg \omega_0$). Dosazením do vzorce pro poměr amplitud získáváme poměry amplitud ρ_1 a ρ_2

$$\rho_1 = \frac{\beta(\omega_1)}{\alpha(\omega_1)} = -\mathrm{i}\frac{k - m\frac{k^2}{q^2B_0^2}}{k} = -\mathrm{i}\left(1 - \frac{m^2k}{q^2B_0^2m}\right)\,.$$

Zde si můžeme všimnout, že druhý člen v závorce je zanedbatelný, a tím pádem dostaneme

$$\rho_1 = -\mathrm{i}\,.$$

Pro druhou frekvenci je

$$\rho_2 = -\mathrm{i}\frac{k - m\frac{q^2B_0^2}{m^2}}{\frac{q^2B_0^2}{m}} = -\mathrm{i}\left(\frac{km^2}{mq^2B_0^2} - 1\right)\,.$$

Opět, první člen v závorce je zanedbatelný, a platí tedy

$$\rho_2 = \mathrm{i}\,.$$

Pro první typ kmitů jsou tedy rovnice oscilací

$$x = A\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega_1 t}\,,$$
$$y = -\mathrm{i}A\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega_1 t}\,,$$

kde A je nějaká konstanta. Pokud zapíšeme $-\mathrm{i} = \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{\pi}{2}}$, můžeme pro oscilace (tentokrát vezmeme opravdu reálnou část explicitně) psát

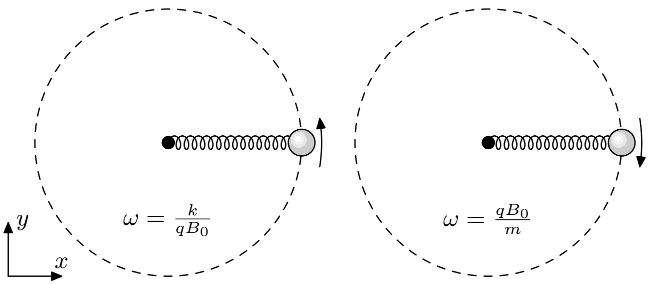
$$x = A\cos(\omega_1 t)\,,$$
$$y = A\cos\left(\omega_1 t - \frac{\pi}{2}\right) = A\sin(\omega_1 t)\,.$$

Toto je rovnice pro pohyb po kružnici o poloměru A. Směr pohybu je proti směru hodinových ručiček. Pro druhý typ kmitů máme obdobně

$$x = A\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega_2 t}\,,$$
$$y = \mathrm{i}A\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega_2 t}\,,$$

$$x = A\cos(\omega_2 t)\,,$$
$$y = -A\sin(\omega_2 t)$$

a pohyb probíhá po stejné kružnici, ale po směru hodinových ručiček. Můžeme si všimnout, že pomalejší kmity (tedy kmity s menší energií) odpovídají kmitům, které vytváří magnetický moment ve stejném směru jako pole **B** (znázorněno vlevo na obrázku 1). Naopak druhý typ kmitů má opačný směr k poli **B** a vyšší energii.



Obr. 1: Načrtnutí oscilací systému - částice obíhá po nebo proti směru hodinových ručiček. Magnetické pole ukazuje ven z papíru, tj. předpokládáme kladné B_0. Dále předpokládáme kladné q. Vyšší frekvence je frekvence oběhu po směru hodinových ručiček.

V dané aproximaci (v silném magnetickém poli) se tedy systém snaží minimalizovat energie vstupem do paramagnetického stavu. V reálných materiálech ovšem zprostředkovávají magnetismus elektrony, pro které je náboj záporný. To způsobí změnu znaménka v poměru amplitud, a tedy změnu směru oběhu částice – nižší stav energie je v diamagnetickém uspořádání.

Štěpán Marek
stepan.marek@fykos.cz