Úloha II.S ... kmitající RLC

10 bodů; průměr 4,78; řešilo 36 studentů

Uvažujme obvod, ve kterém jsou sériově zapojeny cívka, kondenzátor, rezistor a zdroj napětí. Cívka má indukčnost L, kondenzátor má kapacitu C a rezistor má odpor R. Zdroj vytváří střídavé napětí $U = U_0 \cos(\omega t)$. Všechny součástky považujte za ideální. S pomocí zákona zachování energie napište rovnici pro náboj, rychlost náboje (proud I) a zrychlení náboje (rychlost změny proudu I). Jedná se o rovnici tlumených kmitů. Porovnáte-li ji s rovnicí pro tlumené kmity závaží na pružině, co v tomto obvodu hraje roli hmotnosti, tuhosti pružiny a tření? Jaká je přirozená frekvence kmitů?

Dále pomocí veličin L, R a ω vyjádřete kapacitu kondenzátoru, při které by byl fázový posun napětí na kondenzátoru roven $\frac{\pi}{4}$. Jaká bude amplituda napětí na kondenzátoru při tomto fázovém posunu?

Nemechanické kmity jsou taky kmity.

Rovnice pro náboj, jeho rychlost a zrychlení je možné odvodit pomocí zákona zachování energie, který nám říká, že součet napětí přes všechny komponenty obvodu musí být roven napětí na zdroji, tedy

$$\frac{Q}{C} + RI + JL = U_0 \cos(\omega t)\,.$$

Za výchylku lze v tomto systému považovat náboj na kondenzátoru, za rychlost proud I a za zrychlení pak zrychlení proudu J. Tím pádem hraje roli tuhosti pružiny veličina $\frac{1}{C}$, hmotnost odpovídá indukčnosti L a konstantu tření γ lze vyjádřit jako $\frac{R}{L}$ (musíme si uvědomit, že jsme sílu tření definovali jako $\gamma m v$, a tedy koeficient u třecí síly je γm; proto dělíme R veličinou L, jež odpovídá hmotnosti). Roli vnější síly $F\cos(\omega t)$, která nutí systém k oscilacím, hraje napětí $U_0 \cos(\omega t)$. Přirozená frekvence kmitů oscilátoru s pružinou je dána jako $\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$, čemuž v našem obvodu odpovídá $\omega_0 = \sqrt{\frac{1}{CL}}$.

Fázový posun mezi napětím a oscilacemi náboje je dán vztahem

$$\mathrm{cotg}(\varphi_0) = \frac{\omega_0^2 - \omega^2}{\gamma\omega}\,,$$

který jsme odvozovali v seriálu. Napětí na kondenzátoru se mění s oscilacemi náboje na kondenzátoru, a sdílí tedy stejný fázový posun. Pro požadovaný fázový posun lze psát

$$\mathrm{cotg}\left(\frac{\pi}{4}\right) = 1 = \frac{\omega_0^2 - \omega^2}{\gamma\omega}\,,$$

$$\omega_0^2 = \omega(\gamma + \omega)\,,$$

$$\omega_0 = \sqrt{\omega(\gamma + \omega)}\,.$$

V našem obvodu pak platí

$$\sqrt{\frac{1}{LC}} = \sqrt{\omega\left(\frac{R}{L} + \omega\right)}\,,$$

$$C = \frac{1}{\omega(R + \omega L)}\,.$$

Amplituda napětí na kondenzátoru závisí na amplitudě náboje na kondenzátoru (označíme ji Q_0) jako

$$U_C = \frac{Q_0}{C}\,.$$

Amplituda náboje je dána vztahem pro amplitudu tlumených kmitů, je tedy rovna

$$Q_0 = \frac{\frac{F}{m}}{\sqrt{\left(\omega_0^2 - \omega^2\right)^2 + \gamma^2\omega^2}} = \frac{\frac{U_0}{L}}{\sqrt{\left(\frac{1}{LC} - \omega^2\right)^2 + \frac{R^2}{L^2}\omega^2}} =$$
$$= \frac{\frac{U_0}{L}}{\sqrt{\left(\omega\left(\frac{R}{L} + \omega\right) - \omega^2\right)^2 + \frac{R^2}{L^2}\omega^2}} = \frac{U_0}{\sqrt{2}R\omega}\,,$$

kde jsme v posledním kroku dosadili za získanou hodnotu C. Dostáváme tedy výslednou amplitudu kmitů napětí, která má velikost

$$U_C = \frac{U_0}{\sqrt{2}R\omega}\omega(R + \omega L) = \frac{U_0}{\sqrt{2}}\left(1 + \omega\frac{L}{R}\right)\,.$$

Štěpán Marek
stepan.marek@fykos.cz