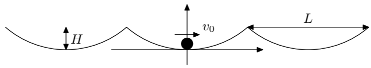
Úloha I.S ... kmitáme

10 bodů; průměr 2,36; řešilo 72 studentů

Seriál začneme zkoumáním několika mechanických oscilátorů, u kterých nás bude zajímat především určení frekvence volných kmitů. Dále si zopakujeme, jak vypadá oscilátor ve fázovém prostoru.



1. *Uvažujme dutý nehmotný kužel, do jehož špičky vložíme kámen o hmotnosti M. Kužel ponoříme špičkou dolů do vody o hustotě ρ, ve které bude plovat. Určete rovnovážnou hloubku ponoru kužele měřenou od špičky h, pokud je celková výška kužele H a poloměr základny R. Dále nalezněte úhlovou frekvenci malých vertikálních kmitů kuželu.*
2. *Představme si závaží o hmotnosti m přidělané na nehmotné pružině o tuhosti k a klidové délce L. Pokud pružinu na druhém konci upevníme, dostaneme kyvadlo. Spočítejte přirozenou úhlovou frekvenci jeho oscilací, přičemž předpokládejte, že délka pružiny se během pohybu nemění. Následně určete malý rozdíl v úhlové frekvenci $\Delta\omega$, o který se úhlová rychlost tohoto kyvadla liší od případu, ve kterém je pružina nahrazena nedeformovatelnou tyčí se stejnou klidovou délkou. Přitom předpokládejte $kL \gg mg$.*
3. *V terénu, který se skládá z periodicky se opakujících parabol s výškou H a šířkou L, se nachází kostka cukru s hmotností m. Popište její potenciální energii jako funkci souřadnice v horizontálním směru a následně načrtněte možné trajektorie jejího pohybu ve fázovém prostoru v závislosti na rychlosti v_0, kterou má při průchodu vrcholem paraboly. Na náčrtku označte všechny významné vzdálenosti. Pro výchylku použijte horizontální souřadnici, vhodně přizpůsobte jednotky hybnosti v horizontálním směru. Při výpočtech zanedbejte kinetickou energii pohybu kostky ve vertikálním směru a předpokládejte, že stále zůstává v kontaktu s terénem.*

Štěpán našel pár základních oscilátorů.

Kužel

Pokud je kužel ponořen do hloubky h, je jeho poloměr v úrovni hladiny roven

$$r = \frac{R}{H}h$$

a jeho objem pod hladinou bude

$$V = \frac{1}{3}\pi r^2 h = \frac{\pi R^2 h^3}{3H^2}\,.$$

Vztlaková síla působící na kužel je tedy

$$F = -\rho g V = -\frac{\pi\rho g R^2 h^3}{3H^2}\,,$$

kde znaménko minus značí, že síla působí v opačném směru vzhledem ke směru ponoru h. Tíhová síla má velikost Mg a působí ve směru souřadnice h, z nulové výslednice sil v rovnovážné poloze tedy vyplývá

$$h^3 = \frac{3MH^2}{\pi\rho R^2} \quad \Rightarrow \quad h = \left(\frac{3MH^2}{\pi\rho R^2}\right)^{\frac{1}{3}}\,.$$

Při malé výchylce $\Delta h \ll h$, která zvětší ponor kužele, dojde ke zvětšení vztlakové síly F_v, jež má nyní velikost

$$F_\mathrm{v} = -\frac{\pi \rho g R^2}{3H^2}(h+\Delta h)^3 = -\frac{\pi \rho g R^2}{3H^2} h^3 \left(1+\frac{\Delta h}{h}\right)^3 \approx -\frac{\pi \rho g R^2}{3H^2} h^3 \left(1+\frac{3\Delta h}{h}\right) .$$

Výslednice sil působících na kužel je potom rovna

$$\Delta F = F_\mathrm{v} + F_g = F_\mathrm{v} - F = -\frac{\pi \rho g R^2 h^3}{3H^2}\frac{3\Delta h}{h} = -\frac{\pi \rho g R^2 h^2}{H^2}\Delta h .$$

Pro zrychlení kužele dostáváme

$$a = \frac{\Delta F}{M} = -\frac{\pi \rho g R^2 h^2}{M H^2}\Delta h ,$$

což indentifikujeme jako základní rovnici pro harmonické kmity. Frekvence kmitů je

$$\omega = \sqrt{\frac{\pi \rho g R^2 h^2}{M H^2}} = \left(\frac{\pi \rho g R^2}{M H^2}\right)^{\frac{1}{2}} \left(\frac{3 M H^2}{\pi \rho R^2}\right)^{\frac{1}{3}} = \left(\frac{9 \pi \rho g^3 R^2}{M H^2}\right)^{\frac{1}{6}} .$$

Kyvadlo

Prodloužení pružiny zřejmě bude

$$\Delta L = \frac{mg}{k} ,$$

frekvence oscilací kyvadla je dána jako

$$\omega = \sqrt{\frac{g}{l}} = \sqrt{\frac{g}{L+\Delta L}} = \sqrt{\frac{g}{L+\frac{mg}{k}}} = \sqrt{\frac{g}{L}}\left(1+\frac{mg}{kL}\right)^{-\frac{1}{2}} .$$

Oproti kyvadlu s nedeformovatelnou tyčí tedy existuje rozdíl ve frekvenci kmitů, pro $kL \gg mg$ můžeme psát

$$\Delta\omega = \sqrt{\frac{g}{L}}\left(1+\frac{mg}{kL}\right)^{-\frac{1}{2}} - \sqrt{\frac{g}{L}} \approx -\frac{mg}{2kL}\sqrt{\frac{g}{L}} .$$

Důležitým kvalitativním pozorováním je, že prodloužením tyče se zmenší úhlová frekvence kmitů kyvadla.

Kostka cukru

V naznačeném souřadnicovém systému má jedna z parabol vrchol v počátku. Její obecný předpis je tedy

$$y = cx^2 ,$$

kde x je horizontální souřadnice a c neznámá konstanta. Vzhledem k tomu, že stejnými, periodicky se opakujícími parabolami je tvořen celý povrch, se v dalších úvahách můžeme omezit na interval

$$x \in \left[-\frac{L}{2}, \frac{L}{2}\right] .$$

Aby měla parabola v bodě $x = \frac{L}{2}$ výšku H, musí platit

$$H = c\frac{L^2}{4} \quad \Rightarrow \quad c = \frac{4H}{L^2}\,.$$

Potenciální energie kostky má proto tvar

$$E_\mathrm{p} = mgy = \frac{4mgH}{L^2}x^2\,.$$

Pro náčrt fázového prostoru je zapotřebí určit celkovou mechanickou energii, která bude rovna

$$E = \frac{1}{2}mv^2 + E_\mathrm{p} = \frac{p^2}{2m} + \frac{4mgH}{L^2}x^2\,.$$

Energie se zachovává, přičemž v počátku platí

$$E = \frac{1}{2}mv_0^2\,.$$

Z toho postupnými úpravami dostáváme

$$x^2 + \frac{p^2}{2m}\cdot\frac{L^2}{4mgH} = \frac{1}{2}mv_0^2\cdot\frac{L^2}{4mgH}\,,$$
$$x^2 + \frac{p^2}{\frac{8m^2gH}{L^2}} = \frac{v_0^2L^2}{8gH}\,.$$

Odtud vidíme, že kostka ve fázovém prostoru opisuje kružnici s poloměrem

$$r = \frac{v_0L}{\sqrt{8gH}}\,,$$

udáváme-li hybnost v jednotkách

$$\sqrt{\frac{8m^2gH}{L^2}}\,.$$

Nyní už je snadné tyto výsledky zobecnit a popsat pohyb kostky po parabolách, které nemají střed v počátku – kostka bude ve fázovém prostoru opět opisovat kružnici, jejíž střed bude ležet na ose x v bodě, v němž má vrchol parabola, ve které se kostka právě nachází.

Důležitým poznatkem je, že toto platí pouze tehdy, je-li počáteční kinetická energie menší než potenciální energie v nejvyšším bodě paraboly, tedy pokud platí

$$\frac{1}{2}mv_0^2 < mgH$$

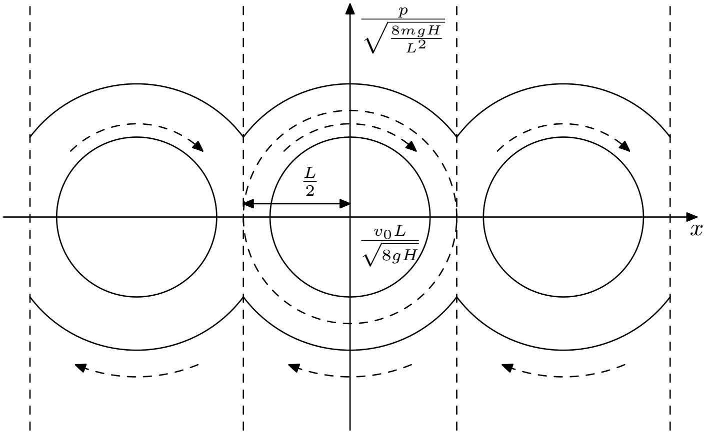
neboli

$$v_0 < \sqrt{2gH}\,.$$

Ve fázovém prostoru to odpovídá kritickému poloměru kružnice

$$r < \sqrt{2gH}\cdot\frac{L}{\sqrt{8gH}} = \frac{L}{2}\,,$$

jak lze očekávat z geometrie zadané paraboly. Pokud je energie kostky vyšší, bude se vždy pohybovat po části kružnice s příslušným poloměrem v dané parabole. Od okamžiku, kdy



Obr. 1: Fázový diagram pro kostku v nejnižším bodě paraboly. Čárkované vertikální čáry označují hranice parabol. Čárkovaná kružnice značí kružnici s kritickým poloměrem. Čárkované šipky označují směr pohybu ve fázovém prostoru.

přesáhne nejvyšší bod, bude pokračovat po části kružnice se středem ve středu vedlejší paraboly (viz obrázek 1).

Ve standardním prostoru si lze tyto dvě alternativy představit následovně. První možností je, že kostka osciluje okolo vrcholu paraboly, přičemž vždy zpomaluje, když se blíží do maximální výšky odpovídající výchylce $x = \pm\frac{v_0 L}{\sqrt{8gH}}$. V ní se obrátí směr rychlosti, a kostka se tak začne vracet zpět k vrcholu paraboly. V tomto případě má kostka malou energii a je omezena na pohyb v rámci jediné paraboly.

Pokud má ale kostka dostatečnou energii (tedy $v_0 > \sqrt{2gH}$), může překonat nejvyšší bod paraboly a následně pokračovat v pohybu stejným směrem. Při výstupu bude sice stále zpomalovat, ale její rychlost nikdy neklesne na nulu, a proto nikdy nezmění směr. Kostka se tak může volně pohybovat jedním směrem napříč parabolami.

Štěpán Marek
`stepan.marek@fykos.cz`