Úvodem

Milé řešitelky, milí řešitelé,

blížíme se pomalu do finále, čeká na vás předposlední - 5. série FYKOSu!

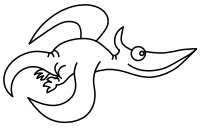
V páté sérii pomůžeme Lukášovi vyřešit problém s pokličkou přichycenou k hrnci, rozebereme si Karlovo umění brzdit (které se může zvrhnout ve frajerské driftování), ale také zkusíme navrhnout ideální model vejce, které by odolalo co největšímu tlaku.

Experimentální úloha se podívá na zoubek bateriím, tedy zejména jejich výrobcům. Myslíte, že uvedená kapacita na obalu odpovídá skutečnosti?

V seriálu se budeme zabývat zejména vlnami, které navážou na poslední příklad páté série.

Závěr bychom vám chtěli poděkovat za netradiční ročník Fyziklání, které letos kvůli pandemické situaci proběhlo online. Absolutním vítězem se stal tým 30chuaphailaT(Ê)ST z hanoiské Amsterdam High School for the Gifted. Všem účastníkům gratulujeme!

Organizátoři



Zadání V. série

Termín uploadu: 30. 3. 2021 23.59
Termín odeslání: 29. 3. 2021

Úloha V.1 ... náboj Země

3 body

Jaký celkový náboj by musela mít Země, aby elektrony blízko jejího povrchu odlétávaly pryč? Jak by se tento náboj lišil pro protony?

Úloha V.2 ... retardovaný Jupiter

3 body

Siderická perioda Jupiteru činí přibližně 11,9 roku, rychlost světla je $3 \cdot 10^8\,\mathrm{m\cdot s^{-1}}$, vzájemnou vzdálenost Země a Slunce předpokládejte rovnu $150 \cdot 10^9\,\mathrm{m}$. Pomocí těchto veličin odhadněte, jak dlouho poletí světlo z Jupiteru na Zem, jestliže se Jupiter nachází na místě, na které se z opozice dostane za jednu čtvrtinu synodické periody.

Úloha V.3 ... nedobrovolné breathariánství

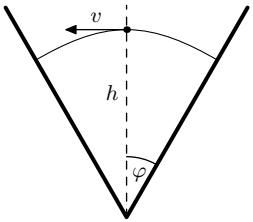
6 bodů

Lukáš si chtěl uvařit večeři. Postavil hrnec na plotnu, ale zapomněl do něj dát vodu (nebo cokoliv jiného). Teplota hrnce a vzduchu uvnitř něj se ustálila na 100 °C (neptejte se, jak se to bez vody podařilo). Lukáš si záhy svoji chybu uvědomil a hrnec z plotny sundal, po vychladnutí na pokojovou teplotu z něj ale nedokázal sejmout poklici o ploše S a hmotnosti m. Spočítejte, jakou silou poklice na hrnci držela, pokud ji tam Lukáš dal

1. těsně před sundáním z plotny,
2. před začátkem přípravy večeře.

Předpokládejte, že vzduch se chová jako ideální plyn.

Úloha V.4 ... perioda velkých kmitů 7 bodů



Uvažujme dvě poloroviny, které svírají úhel $2\varphi < \pi$. Umístíme je tak, aby jejich společná přímka byla vodorovná a jejich rovina symetrie byla svislá, takže vytvoří jakési údolí. Následně vezmeme hmotný bod a z výšky h nad společnou přímkou jej hodíme rychlostí v ve vodorovném směru tak, aby začal konat periodický pohyb jako na obrázku. Jak velkou rychlostí ho musíme hodit? Předpokládejte dokonale pružné odrazy od polorovin.

Úloha V.5 ... rheonomní katapult 10 bodů

Mějme tenkou obdélníkovou desku, která se otáčí kolem své horizontálně orientované hrany konstantní úhlovou rychlostí. V okamžiku, kdy se deska nachází ve vodorovné poloze a otáčí se směrem nahoru, na ni umístíme malý kvádřík tak, aby se vzhledem k ní zpočátku nepohyboval. Jak se bude kvádřík po desce pohybovat, jestliže je tření mezi oběma tělesy nulové? Kam musíme kvádřík na začátku umístit, aby z desky vyletěl po čtvrtině otáčky desky? Diskutujte dále všechny potřebné předpoklady, které pro to musí být splněny.

Bonus Jaký výkon dodává deska kvádříku a jakou celkovou práci na něm vykoná?

Úloha V.P ... to nechceš 9 bodů

Jistě jste již někdy slyšeli, že skořápka běžného slepičího vejce dokáže vydržet i poměrně velký tlak. Vysvětlete, jak je to možné, když je přeci velmi snadné vejce rozbít. V jakém směru snese skořápka největší zatížení? Proč a jak se rozbije, když ji zatížíme příliš? Popište různé mechanismy a určete, který je nejpravděpodobnější. Nezapomeňte, že se zabýváme skutečnými, nikoli ideálními vejci. Kde to bude možné, zkuste svá tvrzení podpořit výpočty.

Úloha V.E ... neklamou nás? 12 bodů

Změřte kapacitu libovolné baterie (například tužkové AA) a porovnejte ji s deklarovanou hodnotou.

Úloha V.S ... rezonance a tlumení 10 bodů

1. Na napnutém laně mohou existovat vlny ve výchylce $u(x,t)$ z rovnovážné polohy, které splňují vlnovou rovnici s tlumením

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = v^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \Gamma \frac{\partial u}{\partial x},$$

   kde v je fázová rychlost a Γ je tlumící koeficient. Proveďte fourierovskou substituci a určete disperzní vztah. Vyřešte jej pro vlnové číslo k. Jakou podmínku, vyjádřenou pomocí frekvence ω, fázové rychlosti v a koeficientu Γ, musí vlny splňovat, aby byly na laně pozorovány uzly (body, ve kterých lano zůstává v rovnovážné poloze, ale v jejichž okolí se pohybuje)?
2. Uvažujte švihadlo, přichycené na jednom konci k nehybné stěně. Ve vzdálenosti L od stěny jej chytneme do ruky a začneme s ním pohybovat nahoru a dolů, čímž v něm vytvoříme

vlnění. Švihadlo s délkovou hustotou λ udržujeme v napětí T ve směru od stěny, výchylka tedy splňuje rovnici

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{T}{\lambda}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\,.$$

Pro výchylku konce švihadla, se kterým pohybujeme, platí $u_0(t) = A\cos(\omega_0 t)$. Předpokládejte, že řešení lze zapsat ve formě dvou rovinných vln, pohybujících se v opačných směrech. Nalezněte takové řešení pouze s využitím zadaných parametrů, tj. T, λ, L, A a ω_0. Výsledné řešení má amplitudu rostoucí nade všechny meze pro určité frekvence. Určete jejich hodnoty a jim odpovídající vlnové délky.

Řešení IV. série

Úloha IV.1 ... dvě kapky

3 body; (chybí statistiky)

Od vodovodního kohoutku se těsně za sebou odtrhnou dvě kapky a začnou padat dolů. Jak se bude jejich vzájemná vzdálenost měnit v čase? Odpor vzduchu zanedbejte.

Bonus Odpor vzduchu započítejte, odhadněte potřebné parametry a určete vzdálenost kapek po dlouhé době. *Karel se hypnotizoval vodou.*

Pro jednoduchost předpokládejme, že kapky jsou stejně velké koule. Stejná velikost plyne z toho, že velikost kapky je dána zejména tvarem místa, odkud se odtrhává, a hodnotou povrchového napětí kapaliny, z níž je tvořena. Obě veličiny jsou u obou kapek stejné a jejich poloměr r tak bude také stejný.[1] To, že kapky padají ve tvaru velmi blízkém kouli, se dá pozorovat na zpomalených záznamech rychloběžných kamer.[2]

Obě kapky padají v homogenním tíhovém poli se zrychlením g. Uvažujeme, že kapky jsou v okamžiku odtržení v klidu a od té chvíle padají rovnoměrně zrychleným pohybem

$$h = \frac{1}{2}gt^2\,,$$

kde h je hloubka, ve které se kapka nachází v čase t po odtržení.

Začněme měřit čas t od chvíle, kdy se uvolní druhá kapka a první kapka je o h_0 níže. Kapky by se neměly dotýkat, tedy $h_0 > 2r$, kde r je poloměr kapky. Pokud bychom uvažovali vzdálenost $h_0 = 2r$, pak by se kapky kvůli povrchovému napětí slily. Ve skutečnosti trvá nějakou dobu než se druhá kapka zformuje, což znamená, že počáteční vzdálenost bude skutečně vyšší. Pro vzdálenost těžišť kapek v závislosti na času platí

$$\Delta h = h_1 - h_2 = \frac{1}{2}g\left(t_1^2 - t_2^2\right) = \frac{1}{2}g\left(\left(t_2 + \sqrt{\frac{2h_0}{g}}\right)^2 - t_2^2\right) =$$

$$= \frac{1}{2}g\left(2t_2\sqrt{\frac{2h_0}{g}} + \frac{2h_0}{g}\right) = t_2\sqrt{2gh_0} + h_0\,,$$

kde jsme číselným indexem označili veličiny odpovídající jednotlivým kapkám. Doba, kterou padá druhá kapka je ale shodná s dobou, kterou chceme měřit. Když ještě odečteme z předchozího výsledku rozměry kapek, abychom dostali jejich vzdálenost, vidíme, že se zvyšuje s rostoucím časem lineárně dle vztahu

$$D = t\sqrt{2gh_0} + h_0 - 2r\,.$$

[1] Pokud se na daný problém podíváme detailně, můžeme zjistit, že se za velkou kapkou, kvůli kmitání povrchu vody, utrhne ještě další menší kapka. To můžeme pozorovat například na videu `https://youtu.be/c4MUTij8f6I`. Zajímejme se pouze o „velké“ kapky, které by měly být prakticky stejně velké.

[2] Jak ve videu z minulé poznámky, tak i na dalším `https://youtu.be/lLYhkU6tMA8`.

Bonus

Pro použití standardních vzorců pro odporovou sílu je potřeba, aby vzdálenost kapek mezi sebou byla dostatečně vysoká. Vzorce zpravidla předpokládají, že okolní odporové prostředí je v klidu a předmět pohybující se skrz něj nutí okolní látku k obtékání. V realitě průchod prvního tělesa tekutinou způsobí, že se tekutina rozpohybuje a obvykle je pro druhý předmět o něco jednodušší pohybovat se tímto prostředím, tedy je mu kladen menší odpor (odporová síla). Toho využívají hejna hus i cyklisti. Efekt se dá v silnější formě ukázat na experimentu s pírkem a knihou. Zkuste upustit nejdříve samotnou knihu a pak samotné pírko a sledujte, jak rychle padají tyto předměty k zemi zvlášť. Zkuste pak položit pírko na knihu a upusťte je současně. Pokud pírko nesfoukne boční poryv větru, pak spadnou na zem společně.

Nyní bychom měli zvážit, který odporový vztah použít. První variantou je Stokesův vzorec

$$F_{\mathrm{S}} = 6\pi\eta r v\,,$$

kde η je dynamická viskozita charakterizující vnitřní tření tekutiny a v rychlost tělesa. Stokesův vzorec funguje pro koule, které jsou laminárně obtékané tekutinou. Jinak řečeno, rychlost pohybu tekutiny okolo kapky by musela být taková, aby nevznikaly víry, což platí pro malé rychlosti.

Alternativou je Newtonův vztah

$$F_{\mathrm{N}} = \frac{1}{2} C S \rho v^2\,,$$

kde ρ je hustota tekutiny, C je bezrozměrný součinitel odporu, který závisí na tvaru tělesa, a S je příčný průřez tělesa. Ten funguje dobře pro vyšší rychlosti, kde nastává turbulentní proudění. Má ovšem také limity – při dalším zvyšováním rychlosti, typicky pro ty blízké rychlosti zvuku v daném prostředí, odpor začne růst ještě prudčeji než s kvadrátem rychlosti. Po překročení rychlosti zvuku pak odpor v nějaké oblasti rychlostí klesá, než opět začne růst. Tento „detail“ se nás ale netýká, protože kapka se na takovou rychlost neurychlí.

Určeme, na jakých maximálních rychlostech by se ustálila kapka o poloměru $r = 1{,}0\,\mathrm{mm}$, pokud by se pohybovala podle jednotlivých vztahů. Při ustálení rychlosti se vyrovná odporová síla s tíhovou $F_g = mg$. Dosazovat budeme parametry $\eta = 1{,}8\cdot 10^{-5}\,\mathrm{Pa{\cdot}s}$, $\rho = 1{,}29\,\mathrm{kg{\cdot}m^{-3}}$, $C = 0{,}50$ a hustotu kapky $\rho_{\mathrm{k}} = 1{,}00\cdot 10^3\,\mathrm{kg{\cdot}m^{-3}}$. Pro hmotnost použijeme vztah $m = \rho_{\mathrm{k}} V$, kde $V = 4\pi r^3/3$ je objem koule a $S = \pi r^2$ její průřez.

$$\begin{aligned}
F_{\mathrm{S}} = F_g \quad &\Rightarrow \quad 6\pi\eta r v_{\mathrm{S}} = \frac{4}{3}\pi r^3 \rho_{\mathrm{k}} g\,,\\
&\qquad v_{\mathrm{S}} = \frac{2 g \rho_{\mathrm{k}} r^2}{9\eta}\,\frac{g}{\eta} \approx 120\,\mathrm{m{\cdot}s^{-1}}\,,\\
F_{\mathrm{N}} = F_g \quad &\Rightarrow \quad \frac{1}{2} C S \rho v_{\mathrm{N}}^2 = \frac{4}{3}\pi r^3 \rho_{\mathrm{k}} g\,,\\
&\qquad v_{\mathrm{N}} = \sqrt{\frac{8 g \rho_{\mathrm{k}} r}{3 C \rho}} \approx 6\,\mathrm{m{\cdot}s^{-1}}\,.
\end{aligned}$$

Jak ale odhadnout, který vzorec by měl být vhodnější? To můžeme rozlišit například s pomocí výpočtu Reynoldsova čísla. Pro kouli pohybující vazkou tekutinou je[3]

$$\mathrm{Re} = \frac{2 r v \rho_{\mathrm{k}}}{\eta}\,.$$

[3] Viz např. Wikipedia – Reynolds number – Object in a fluid – Sphere in a fluid `https://en.wikipedia.org/wiki/Reynolds_number#Sphere_in_a_fluid`.

Zkusíme-li dosadit nižší z rychlostí v_N, dostáváme řádově $7 \cdot 10^5$ a pro v_S by hodnota Reynoldsova čísla byla ještě vyšší. To odpovídá silně turbulentnímu pohybu. Hranice laminárního a turbulentního proudění není úplně jasně definovaná – avšak hodnoty ve stovkách tisíc jednoznačně ukazují na turbulentní. Proto je zřejmě vhodnější využít Newtonův vztah pro kapky s podobným rozměrem.

Celkově je odpovědí na bonus pro tuto jednoduchou úlohu, že nejprve se obě kapky budou urychlovat se zrychlením prakticky stejným jako je tíhové. Tím, jak poroste jejich rychlost, se bude odporová síla zvyšovat. Tím bude zrychlení klesat. Rychlost kapky se bude stále zvyšovat a postupně se blížit terminální rychlosti v_N. Vhodnost využití odporového vzorce pro turbulentní proudění jsme si potvrdili výpočtem Reynoldsova čísla. Po delším čase bude vzdálenost mezi kapkami, které mají stejný poloměr, konstantní. Nejsnadněji ji můžeme vypočítat jako součin rychlosti a rozdílu času startu obou kapek, tedy

$$D = v_\mathrm{N}\,(t_1 - t_2) = t_0 \sqrt{\frac{8g\rho_\mathrm{k} r}{3C\rho}}\,.$$

Proč takto snadno? Protože průběh pádu probíhal u obou kapek stejně, byl pouze posunutý v čase. Nechť po nějaké dostatečně dlouhé době (takové, aby se už kapky pohybovaly terminálními rychlostmi) proletí první kapka bodem h. Druhá jím zřejmě proletí o t_0 později. Jelikož se první pohybuje terminální rychlostí, urazí za tuto dobu vzdálenost $v_\mathrm{N} t_0$.

Co jsme neuvažovali a jak by bylo možné zpracování dále vylepšit? Zanedbali jsme vztlakovou sílu působící na kapky, ale ta je zhruba 800× menší, než je tíhová. Tiše jsme předpokládali, že kapky padají z velké výšky a nedopadnou na zem a během pádu se nijak nebudou měnit. To nemusí být pravda, protože pádem v suchém vzduchu se bude kapka odpařovat, naopak při pádu v mlze by se její hmotnost a poloměr mohly zvyšovat. Současně ale padají v konstantních podmínkách – konstantní tíhové zrychlení, hustota vzduchu a další parametry, což by pro velice dlouhý pád neplatilo. Dále bychom se mohli více věnovat kapkám s různými poloměry. V tom případě bychom zjistili, že pokud bychom vypustili malou kapku a následně kapku větší, druhá by měla tendenci tu první „dohnat“ a pravděpodobně by se slily. Mohli bychom numericky či analyticky vypočítat vzdálenost kapek v každém čase. Pro dvě velice rychle za sebou padající kapky by pak mohlo být zajímavé numericky simulovat pohyb vzduchu kolem nich v průběhu jejich pádu. Ale to jsou komplikovanější problémy za hranicí bonusu jednoduché úlohy.

Karel Kolář
karel@fykos.cz@fykos.cz

Úloha IV.2 ... pružinek není nikdy dost

3 body; (chybí statistiky)

Jakou práci vykonáme při zkroucení pružiny z rovnovážné polohy o úhel $\alpha = 60°$, pokud pružinu ve zkrouceném stavu udržujeme momentem síly $M = 1{,}0\,\mathrm{N{\cdot}m}$?

Dodo se zamyslel nad energií, kterou dává do věšení prádla.

Postup je analogický ako pre obvyklé naťahovanie pružiny. Stačí len zameniť niektoré veličiny v známych vzťahoch. Prácu určíme ako

$$W = \frac{1}{2} D\alpha^2\,,$$

kde D je direkčný moment (akási tuhosť v torzii) a α je uhlová výchylka. Namiesto sily pre lineárne natiahnutie pružiny máme pre skrut moment sily

$$M = D\alpha\,.$$

Vyjadrením direkčného momentu a dosadením dostávame pre prácu

$$W = \frac{1}{2}M\alpha = 0{,}52\,\mathrm{J}\,,$$

kde pri uhlovej výchylke netreba zabudnúť previesť stupne na radiány.

Jozef Lipták
liptak.j@fykos.cz@fykos.cz

Úloha IV.3 ... křivá optika

5 bodů; (chybí statistiky)

Mějme bodový zdroj světla a rovinnou skleněnou desku s indexem lomu $n = 1{,}50$. V místě paty kolmice od zdroje na desku se uvnitř desky nacházejí vlnoplochy s poloměrem křivosti $R = 5{,}00\,\mathrm{m}$. Jaká je skutečná vzdálenost zdroje a desky? *Dodo je pěkný křivák.*

Nechť r je skutečná vzdálenost, potom paprsek dopadající ve vzdálenosti h od kolmice tvoří trojúhelník, který má u zdroje úhel α. Potom platí

$$\sin\alpha = \frac{h}{\sqrt{h^2 + r^2}}\,.$$

Paprsek vstupuje do krystalu desky pod úhlem α a zlomí se na úhel β, kde $\sin\alpha = n\sin\beta$. V tom bodě se bude zdát, že paprsek pochází ze zdroje u kterého je úhel β, takže můžeme psát

$$\sin\beta = \frac{h}{\sqrt{h^2 + R^2}}\,.$$

Z rovnosti výše máme

$$\left(h^2 + R^2\right) = n^2\left(h^2 + r^2\right)\,,$$

což v limitě $h \to 0$ vede na

$$r = \frac{R}{n} \doteq 3{,}33\,\mathrm{m}\,.$$

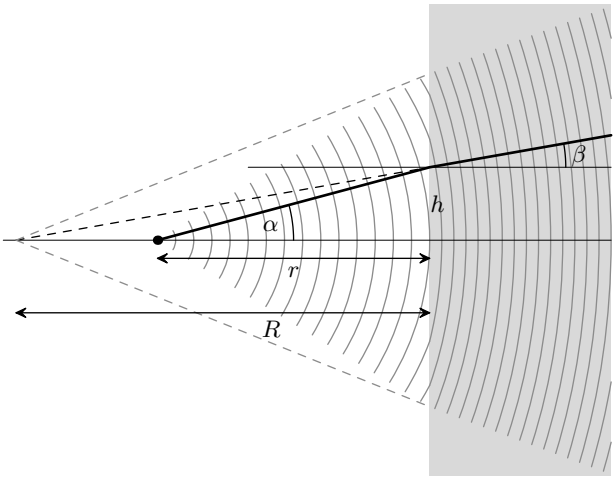
Jozef Lipták
liptak.j@fykos.cz@fykos.cz

Úloha IV.4 ... mravenčí

8 bodů; (chybí statistiky)

Mravenci přišli na zajímavý způsob vyhřívání mraveniště – vylezou ven, nechají se ohřát slunečním zářením a opět vlezou dovnitř, kde zase předají teplo mraveništi. To aproximujeme kuželem o výšce $H = 0{,}8\,\mathrm{m}$ s poloměrem podstavy $R_0 = 1{,}5\,\mathrm{m}$. Celulózové stěny s tepelnou vodivostí $\lambda = 0{,}039\,\mathrm{W{\cdot}m^{-1}{\cdot}K^{-1}}$ jsou široké $2\,\mathrm{cm}$.

Předpokládejme, že veškerá tepelná výměna mezi mraveništěm a okolím (které má teplotu $T_\mathrm{o} = 10\,^\circ\mathrm{C}$) je zprostředkována pouze mravenci a vedením přes stěny, tepelnou výměnu



se zemí můžeme zanedbat. Mravenec váží $m = 5\,\mathrm{mg}$ *a má měrnou tepelnou kapacitu odhadem* $4\,000\,\mathrm{J{\cdot}kg^{-1}{\cdot}K^{-1}}$. *Kolik mravenců vyhřátých na* $T_\mathrm{m} = 37\,^\circ\mathrm{C}$ *musí každou sekundu přilézt do mraveniště, aby v celém vnitřním objemu udrželi konstantní teplotu* $T_\mathrm{M} = 20\,^\circ\mathrm{C}$*?*

Kátě se stýskalo po biologii.

Tepelný tok stěnou o ploše S a tloušťce a určíme jako

$$P = \frac{S\lambda\Delta T}{a}\,,$$

kde $\Delta T = T_\mathrm{M} - T_\mathrm{o}$. Plochu mraveniště vypočteme pomocí standardního vzorce pro povrch kužele. Správně bychom měli tok určit rozdělením mraveniště na infinitezimálně tlusté kužely, protože každá „vrstva“ bude mít trochu jiný povrch, a proto i jinak povede teplo. Vzhledem k tomu, že $a \ll R_0$, můžeme tuto skutečnost zanedbat.

Povrch mraveniště bude $S = \pi R_0\sqrt{R_0^2 + H^2}$, potom pro tepelné ztráty dostaneme

$$P = \frac{\pi R_0\sqrt{R_0^2 + H^2}\lambda\Delta T}{a} \doteq 156\,\mathrm{W}\,.$$

Tok stěnami se musí rovnat teplu, které do mraveniště přinášejí mravenci. Každý mravenec s tepelnou kapacitou c přinese teplo

$$Q_\mathrm{m} = cm\,(T_\mathrm{m} - T_\mathrm{M})\ .$$

Za sekundu jich do mraveniště přijde N. Tedy N-násobek tepla, jež do mraveniště přinese jeden mravenec, se musí rovnat tepelným ztrátám skrz stěny mraveniště. Porovnáním těchto dvou veličin dostaneme

$$N = \frac{P}{Q} = \frac{\pi R_0\sqrt{R_0^2 + H^2}\lambda\,(T_\mathrm{M} - T_\mathrm{o})}{acm\,(T_\mathrm{m} - T_\mathrm{M})} \doteq 460\,\mathrm{s^{-1}}\,.$$

Po dosazení hodnot vychází, že pro udržení konstantní teploty musí do mraveniště každou sekundu přijít přibližně 460 vyhřátých mravenců.

Kateřina Charvátová
`katerina.charvatova@fykos.cz@fykos.cz`

Úloha IV.5 ... Efchári-Goiteía

8 bodů; (chybí statistiky)

Efchári a Goiteía jsou dvě složky dvojplanety okolo nedávno vzniklé hvězdné soustavy. Obíhají okolo společného těžiště po kruhových trajektoriích ve vzdálenosti $a = 250 \cdot 10^3\,\mathrm{km}$. *Efchári má poloměr* $R_1 = 4\,300\,\mathrm{km}$, *hustotu* $\rho_1 = 4\,100\,\mathrm{kg{\cdot}m^{-3}}$ *a dobu siderické rotace* $T_1 = 14\,\mathrm{h}$. *Goiteía je menší s poloměrem* $R_2 = 3\,800\,\mathrm{km}$, *má však větší hustotu* $\rho_2 = 4\,500\,\mathrm{kg{\cdot}m^{-3}}$ *a kratší dobu rotace* $T_2 = 11\,\mathrm{h}$. *Osy rotace planet i soustavy jsou rovnoběžné. Za několik set milionů let přejde soustava díky slapovým silám do tzv. vázané rotace. Určete výslednou změnu oběžné doby za předpokladu, že tělesa jsou homogenní a přibližně sférická.*

Dodovi se neustále plete Phobos a Deimos.

Slapové sily sú sily, ktorými na seba gravitačne pôsobia skutočné telesá, ktoré nie sú bodové. Ich príčinou je rôzna vzdialenosť bodov telesa od zdroja sily a teda jej rôzna veľkosť v rôznych bodoch. Tieto sily telesá deformujú v smere ich pôsobenia, čo je príčina vzniku výdute na povrchu planéty (na Zemi je najlepšie pozorovateľnou zložkou tohto pôsobenia príliv a odliv). Kompenzované sú pružnou silou materiálu, z ktorého sú telesá vytvorené a jeho vlastnou tiažou. Deformácia a jej navrátenie však nie je okamžité. Výduť je unášaná rotáciou planéty mimo priamu spojnicu telies. Na takto pootočenú výduť potom pôsobí druhé teleso nenulovým momentom sily, čo má za následok vyrovnávanie rotačných periód planét s periódou ich vzájomného pohybu. Pri tomto procese sa nezachováva energia (premieňa sa na deformačné teplo), ale zachováva sa celkový moment hybnosti sústavy dvojplanéty. Na začiatok bude užitočné vyjadriť si hmotnosti zložiek

$$M_1 = \frac{4}{3}\pi R_1^3 \rho_1 \doteq 1{,}365 \cdot 10^{24}\,\mathrm{kg}\,, \quad M_2 \doteq 1{,}034 \cdot 10^{24}\,\mathrm{kg}\,.$$

Ďalej bude užitočné určiť pôvodnú obežnú periódu sústavy, z tretieho Keplerovho zákona

$$\frac{a^3}{P^2} = \frac{G\,(M_1 + M_2)}{4\pi^2}$$

máme vzťah

$$P = 2\pi\sqrt{\frac{a^3}{G\,(M_1 + M_2)}} \doteq 1{,}963 \cdot 10^6\,\mathrm{s} \doteq 22{,}7\,\mathrm{d}\,.$$

Pokúsme sa nájsť celkový moment hybnosti L sústavy tesne po vzniku. Správne by bolo potrebné vektorovo sčítať rotačné momenty hybnosti oboch zložiek $(\mathbf{L}_1, \mathbf{L}_2)$ s momentom hybnosti zodpovedajúcemu vzájomnému obehu $\mathbf{L}_\mathrm{o}$. Vzhľadom na kolineárnu orientáciu rotačných osí, v ktorých tieto momenty ležia[4], stačí sčítanie vykonať skalárne $L = L_1 + L_2 + L_\mathrm{o}$. Pre

[4] Vo všeobecnosti ale neleží vektor momentu hybnosti v smere rotačnej osi, platí to len pre viac symetrické telesá.

rotačný moment hybnosti máme $L_i = I\omega$, kde I je moment zotrvačnosti telesa a $\omega = \frac{2\pi}{T}$ je jeho uhlová rýchlosť. Moment zotrvačnosti odhadneme pre planétu ako pre homogénnu guľu

$$I_1 = \frac{2}{5} M_1 R_1^2 \doteq 1{,}010 \cdot 10^{37}\,\mathrm{kg{\cdot}m^2}\,, \qquad I_2 \doteq 0{,}597 \cdot 10^{37}\,\mathrm{kg{\cdot}m^2}\,,$$
$$L_1 = \frac{2\pi I_1}{T_1} \doteq 1{,}259 \cdot 10^{33}\,\mathrm{kg{\cdot}m^2{\cdot}s^{-1}}\,, \quad L_2 \doteq 0{,}948 \cdot 10^{33}\,\mathrm{kg{\cdot}m^2{\cdot}s^{-1}}\,.$$

Pre určenie orbitálneho momentu hybnosti potrebujeme poznať vzdialenosti telies od ťažiska a_i a ich rýchlosti na orbite v_i. Vzdialenosti od ťažiska máme z definície ťažiska ako hmotného stredu

$$a_1 = \frac{aM_2}{M_1 + M_2}\,.$$

Vzhľadom na kruhovosť dráh máme potom

$$L_\mathrm{o} = M_1 v_1 a_1 + M_2 v_2 a_2 = \frac{aM_1M_2}{M_1 + M_2}\,(v_1 + v_2)\,.$$

Rýchlosť telies určíme napríklad z rovnováhy odstredivej a dostredivej sily

$$\frac{M_1 v_1^2}{a_1} = G\frac{M_1 M_2}{a^2}\,,$$

kde je dôležité si uvedomiť, že polomer obehu nie je vzdialenosť telies, na ktorej pôsobí gravitačná sila. Po dosadení a úprave

$$v_1 = M_2\sqrt{\frac{G}{a\,(M_1 + M_2)}}\,,$$
$$L_\mathrm{o} = M_1 M_2\sqrt{\frac{Ga}{M_1 + M_2}} \doteq 1{,}177 \cdot 10^{35}\,\mathrm{kg{\cdot}m^2{\cdot}s^{-1}}\,.$$

Zostáva nám skompletizovať celkový súčet

$$L = \frac{4\pi M_1 R_1^2}{5T_1} + \frac{4\pi M_2 R_2^2}{5T_2} + M_1 M_2\sqrt{\frac{Ga}{M_1 + M_2}}\,.$$

Pre výpočet zmeny samotnej periódy bude vhodné vyčísliť samostatne hodnotu rotačných momentov zotrvačnosti

$$\Delta L = L_1 + L_2 = 2{,}206 \cdot 10^{33}\,\mathrm{kg{\cdot}m^2{\cdot}s^{-1}}\,,$$

ktorá je oproti obežnému momentu skoro o dva rády menšia. V stave viazanej rotácie sa rotačné periódy vyrovnajú s periódou obežnou, preto môžeme rotačnú časť momentu hybnosti vo výslednom stave oproti pôvodnému stavu zanedbať. Moment hybnosti ΔL teda celý prejde do obežného momentu. Pre jeho zmenu máme

$$L_\mathrm{o} = Ka^{\frac{1}{2}} \quad \Rightarrow \quad L_\mathrm{o} + \Delta L_\mathrm{o} = K\,(a + \Delta a)^{\frac{1}{2}} \approx Ka^{\frac{1}{2}} + \frac{1}{2}Ka^{-\frac{1}{2}}\Delta a = L_\mathrm{o}\left(1 + \frac{1}{2}\frac{\Delta a}{a}\right)\,,$$

z čoho vyplýva

$$\frac{\Delta L_\mathrm{o}}{L_\mathrm{o}} \approx \frac{1}{2}\frac{\Delta a}{a}\,.$$

Podobne diferencovaním tretieho Keplerovho zákona

$$2\frac{\Delta P}{P} \approx 3\frac{\Delta a}{a}\,,$$

z čoho dosadením predchádzajúceho vzťahu máme

$$\Delta P \approx 3P\frac{\Delta L_\mathrm{o}}{L_\mathrm{o}}\,.$$

Dosadením číselných hodnôt máme zmenu dĺžky obežnej periódy $\Delta P \doteq 1{,}104 \cdot 10^5\,\mathrm{s} \doteq 1{,}28\,\mathrm{d}$. Úloha sa namiesto diferencovania a teda rozvoju do lineárneho člena dala riešiť aj postupným dosadením nového momentu hybnosti do vzťahu zväzujúceho moment hybnosti a veľkú polos a následne novej veľkej polosi do tretieho Keplerovho zákona pre získanie novej obežnej periódy. Pri tomto postupe dostávame presný výsledok

$$\Delta P = \frac{2\pi\,(M_1+M_2)\,L^3}{G^2M_1^3M_2^3} - P \doteq 1{,}124 \cdot 10^5\,\mathrm{s} \doteq 1{,}30\,\mathrm{d}\,.$$

Jozef Lipták
liptak.j@fykos.cz@fykos.cz

Úloha IV.P ... pták Fykosák na dovolené

10 bodů; (chybí statistiky)

Jak by fungovalo letectví na jiných planetách (s atmosférou)? Zajímejte se hlavně o proudová letadla. Které parametry by působily pozitivněji a které negativněji než na Zemi?

Karel byl v muzeu letectví v Košicích.

Úvod

Úloha je značně otevřená a je možné ji uchopit různými způsoby. Pokusíme se pokrýt ty nejdůležitější parametry a popsat jejich vliv na létání. Letmo se zmíníme i o vybraných pravidlech létání ve spojitosti s měněnými fyzikálními parametry. Speciálně se budeme, dle zadání, věnovat proudovým letadlům. Ty mají motory, které vpředu natahují okolní vzduch. Ten se uvnitř stlačuje kompresory a následně se využívá pro spalování paliva (letecký petrolej či letecký benzín). Spaliny pak pokračují motorem dále k turbíně, kterou roztáčí, tudíž rotuje i osa motoru, na které jsou lopatky kompresoru. Současně s tím je letadlo poháněno díky principu akce a reakce.

„Prolétli“ jsme pouze základní princip motorů, který může být v jednotlivých aplikacích vylepšen dalšími technickými prvky. Výhodou proudových motorů je, že umožňují rychlejší let než vrtulové. Nevýhodou naopak, že základní typ tohoto motoru potřebuje pro vzlet dosáhnout netriviální minimální rychlosti, aby motor fungoval.

Pro jednoduchost budeme v následujícím textu často plyn v atmosféře planety nazývat vzduchem, i když může mít zcela odlišné složení. Nadpisy jsou zvoleny tak, aby se následující část textu věnovala více právě zmíněné fyzikální veličině, nicméně tyto parametry jsou často provázané a působí na letadlo a vlastnosti letu v kombinacích. Tím, že jsme zvolili proudové motory, automaticky jsme zvolili i letadla s přetlakovými kabinami. Létají totiž tak vysoko, že by lidem nebylo moc dobře.[5]

[5] Co si budeme povídat – většina lidí by po tak rychlém nastoupání do 11 km nad zemí zemřela na hypoxii. Jedině možná trénovaní horolezci či potápěči by měli trochu šanci. Také je potřeba v letadle udržovat rozumně vysokou teplotu, protože turisti v žabkách by při teplotách kolem $-55\,^\circ\mathrm{C}$ měli tendenci umrznout.

Hustota atmosféry u povrchu planety

Na planetě bez atmosféry bychom nemohli letadla vůbec využívat. Ze vzduchu je využíván kyslík na spalování paliva. Neméně důležité je látkové prostředí, které vytváří vztlak. Nedá se ovšem přímočaře říct, že čím větší hustota vzduchu, tím lépe ze všech hledisek. Jednoznačně ale platí, že čím hustější je atmosféra, tím nižší rychlost nám stačí pro vzlétnutí.

Podívejme se nejprve, k čemu jsou letadlu motory. Tah motoru se využívá jak na vyrovnání tíhové síly, tak na vyrovnání odporu při letu (případně i zrychlování). Tíhová síla se vyrovnává tím, že křídla letadla svírají vůči letové hladině určitý úhel (úhel náběhu). Dalo by se říct, že to je pro nás užitečná část odporové síly, tedy vztlak. Část spotřebovaná na odpor působící proti pohybu pro nás ovšem již tolik užitečná není a byli bychom raději, kdyby byl tento odpor minimální, případně by nám umožnil co nejvyšší rychlost letadla. Ilustrativně se podívejme, jak závisí odporová síla na rychlosti tělesa. Při turbulentním proudění můžeme obvykle použít Newtonův odporový vztah

$$F_{\text{odp}} = \frac{1}{2} C S \rho v^2 \,,$$

kde C je bezrozměrný koeficient určený tvarem tělesa, S průřez tělesa kolmý na směr pohybu, ρ hustota vzduchu a v je rychlost tělesa. Tento vzorec neplatí přesně pro libovolné rychlosti. U letadel pozorujeme, že odpor při letu prudce roste s tím, jak se rychlost letadla blíží rychlosti zvuku ve vzduchu (rychlosti Mach 1). Když ji nadzvukové letadlo překročí,[6] pak se zpravidla odpor prostředí sníží a opět začne růst až pro výrazně vyšší rychlosti.[7] Pro jednoduchost se nadále budeme tvářit, že Newtonův vztah funguje bez omezení. V praxi inženýři používají komplexní simulace a následně modely ve větrných tunelech, aby si ověřili správnost svých výpočtů.

Uvědomme si, že sílu můžeme rozložit do dvou směrů a vzorec platí jak pro směr pohybu letadla (osa x), tak pro směr proti tíhovému zrychlení (osa y), tedy

$$F_{\text{odp},x} = \frac{1}{2} C_x S_x \rho v_x^2 \,, \quad F_{\text{odp},y} = \frac{1}{2} C_y S_y \rho v_y^2 \,.$$

Vidíme, že jediná proměnná, která je pro obě osy přímočaře shodná, je hustota okolní atmosféry. Mohlo by se zdát, že letadlu letícímu v konstantní letové hladině odpovídá nulová vertikální rychlost. Musíme si ale uvědomit, že jde o relativní rychlost vzduchu vůči letadlu. Můžeme i vyjádřit, jak velká by měla být, aby vyrovnala tíhovou sílu $F_g = mg$, kde m je hmotnost letadla, takže

$$mg = \frac{1}{2} C_y S_y \rho v_y^2 \quad \Rightarrow \quad v_y = \sqrt{\frac{2mg}{C_y S_y \rho}} \,.$$

Jinak řečeno, kdybychom touto rychlostí foukali zespodu na letadlo, pak by se udrželo v konstantní výšce. Letadlo by však muselo být správně naklopené a neotáčet se. Nebo by musel náš fukar fungovat adaptivně podle toho, jak se vůči němu natáčí.

Měli bychom zmínit i aerostatickou vztlakovou sílu $F_{\text{vz}} = \rho V g$, kde V je objem letadla. U letadel na Zemi je docela dobře zanedbatelná kvůli nízké hustotě vzduchu. Pokud bychom byli na planetě s vysokou hustotou atmosféry, pak by nám mohla pomoci letadlo snadněji udržet ve vzduchu. Tím by se ovšem opět zvýšila odporová síla pro dopředný pohyb a letadlo by pravděpodobně dosahovalo výrazně nižších rychlostí.

[6] Což nedokáže každé letadlo, jak diskutujeme dále.

[7] `https://en.wikipedia.org/wiki/Drag-divergence_Mach_number`

Složení atmosféry

Aby mohlo v motoru probíhat spalování, potřebujeme atmosféru ze směsi plynů, která podporuje hoření palivové směsi. Pro stávající motory je ideální způsob natahování vzduchu z okolní atmosféry a následné spálení kyslíku. Mohli bychom motory upravit, aby spalovaly jiné látky či by si letadlo vezlo s sebou všechny složky nutné pro hoření paliva. Druhá možnost ovšem neodpovídá zájmu o proudová letadla, ale šlo by o raketový motor. U proudových motorů je důležitý proud vzduchu procházející skrz celý motor. Jsme tedy limitováni tím, že nějakou část palivové směsi chceme získávat z atmosféry.[8] I pokud se omezíme na běžné hoření, tak můžeme získávat buď kyslík, nebo naopak palivo (např. plynné uhlovodíky). Důvodem, proč bychom nemohli sbírat jak palivo, tak kyslík, je, že by taková atmosféra měla nejspíše tendenci sama vzplanout, což pro létání není vhodné prostředí. Pokud by nevzplála sama, pak bychom ji pravděpodobně naším letadlem zapálili. Obdobně bychom asi nechtěli atmosféru s blížícím se podílem k 100 % kyslíku. Přestože kyslík není sám o sobě hořlavý, atmosféra s vysokým podílem kyslíku by podporovala hoření ještě výrazněji než naše. To by způsobovalo snadné vzplanutí téměř čehokoliv hořlavého umístěného do takového plynu. Současně by to vedlo k rychlé korozi konstrukčních materiálů letadla.

Skladování kyslíku je sice rizikové, ale mohli bychom to vyřešit tlakovými lahvemi na palubě. Atmosféra by pak musela obsahovat vhodný hořlavý plyn. Mohlo by se jednat například o směs podobnou zemnímu plynu, který se převážně skládá z methanu. Relevantní otázkou může být, jestli by bylo reálné takovým palivem něco pohánět a s jakou účinností. Opačně, tedy zemní plyn jako stlačené palivo z nádrže a kyslík z atmosféry, se používá běžně jako alternativní palivo pro auta. Samotná reakce je tedy vhodná pro pohon motorů obecně. Proudové motory letadel by se sice musely upravit, ale není to nemožné. Pokud se podíváme na výhřevnost zemního plynu, pak je dokonce o něco málo vyšší,[9] a to $49\,\mathrm{MJ\cdot kg^{-1}}$ oproti $43\,\mathrm{MJ\cdot kg^{-1}}$ u kerosenu.[10] Řádově jsou tyto hodnoty ale blízké. Navíc záleží na složení konkrétního zemního plynu a leteckého paliva, které se liší podle místa těžby. Možná by bylo vhodnější porovnávat spalná tepla, protože ta zahrnují, na rozdíl od výhřevnosti, i energii, kterou přijme voda uvolňující se při spalování. Poměr tepel by byl ale obdobný.

Jaké množství kyslíku bychom měli s sebou mít v letadle oproti konvenčnímu palivu pro letadlo na Zemi, kdybychom chtěli získat srovnatelnou energii? Pro to potřebujeme znát rovnici spalování. Vyjdeme z dokonalého spalování, protože se budeme snažit motor upravit tak, aby i v nové atmosféře byl co nejúčinnější. Dokonalé spalování je pro nás tak výhodnější než nedokonalé probíhající za nedostatku kyslíku. Pro methan (hlavní složku zemního plynu) vypadá rovnice takto

$$\mathrm{CH_4 + 2\,O_2 \longrightarrow CO_2 + 2\,H_2O}\,, \tag{1}$$

a spalování dekanu (letecký petrolej se skládá z uhlíkových řetězců dlouhých od 9 do 16 uhlíků) je

$$\mathrm{2\,C_{10}H_{22} + 31\,O_2 \longrightarrow 20\,CO_2 + 22\,H_2O}\,. \tag{2}$$

[8] Přípustné by mohlo být létat s oběma přísadami pro hoření, současně do motoru vpouštět tyto složky, a ještě plyn z atmosféry, který by se také po spálení paliva ohříval, čímž by působil další tah. To by bylo možné i v inertní atmosféře. Nicméně je otázkou, jestli by se to konstrukčně vyplácelo a nebylo by lepší používat pouze plyny unikající po spalování. S nejvyšší pravděpodobností by přidávaný plyn zhoršoval účinnost spalování a bylo by těžší zajistit dokonalé spalování paliva.

[9] Přepočteno na hmotnost z `http://www.cng4you.cz/cng-info/co-je-zemni-plyn.html`.

[10] `https://en.wikipedia.org/wiki/Aviation_fuel`

Spotřeba paliva na Zemi je např. pro letadlo Boeing 747 něco pod 2,4 l na 100 km a jednoho pasažéra.[11] To je mimochodem méně než spotřeba většiny aut, pokud v autě jede jeden až dva cestující. Z rovnice (2), molární hmotnosti dekanu[12] $M_{\mathrm{dek}} = 142{,}3\,\mathrm{g\cdot mol^{-1}}$ a kyslíku $M_{\mathrm{O_2}} = 32{,}00\,\mathrm{g\cdot mol^{-1}}$ dostáváme poměr

$$k_{\mathrm{dek}} = \frac{31}{2}\,\frac{M_{\mathrm{O_2}}}{M_{\mathrm{dek}}} \doteq 3{,}49\,,$$

který nám říká, že na jeden kilogram dekanu potřebujeme spálit tři a půl kilogramu kyslíku. U dekanu je pro nás jednoznačně výhodou, že samotné palivo je lehčí než kyslík, když musíme nést palivo s sebou. Čím těžší letadlo musíme udržet ve vzduchu, tím více spotřebujeme paliva. Podívejme se na tento poměr pro methan[13] s $M_{\mathrm{met}} = 16{,}04\,\mathrm{g\cdot mol^{-1}}$. Ten je

$$k_{\mathrm{met}} = \frac{2}{1}\,\frac{M_{\mathrm{O_2}}}{M_{\mathrm{met}}} \doteq 3{,}99\,,$$

což je pro nás velice nevýhodný poměr. Abychom mohli používat methan či další uhlovodíky z atmosféry jako palivo a nést si s sebou kyslík jako okysličovadlo, pak bychom pro možnost spálení srovnatelného hmotnosti paliva museli nést zhruba čtyřnásobnou hmotnost kyslíku. Výhřevnost, resp. spalné teplo, sice byly o něco málo vyšší, ale museli bychom nést i tlakové nádoby na kyslík, které by byly těžší než standardní nádrže na letecký benzín. Spotřeba letadla by tak opět vzrostla. Neříkáme, že by bylo nemožné létat s tímto obráceným režimem, ale jistě by to bylo náročnější a záleželo by na dalších parametrech atmosféry.[14]

Atmosféra by musela být složená buď z málo korozivních plynů,[15] nebo bychom museli letadlo upravit tak, aby v dané atmosféře rychle nekorodovalo. Zrovna v motorech, v nichž je vysoká teplota, by to mohla být konstrukční výzva. Museli bychom pokrývat všechny exponované povrchy dostatečně silnou protikorozní vrstvou, která by je izolovala od atmosféry. Na Zemi používáme za tímto účelem různé laky a mazání. Ostatně sám kyslík je korozivní plyn. Nebo bychom museli nějaké součástky zcela nahradit jinými, například z keramiky, která je ovšem křehčí.

Tíhové zrychlení

Uvažujeme planety, kde je odstředivá složka síly prakticky zanedbatelná vůči gravitační. U přirozeně vzniklé planety odstředivá síla nesmí převýšit gravitační, protože by odletoval materiál z jejího povrchu a planeta by byla jako celek nestabilní. Velká odstředivá síla by byla známkou rychlé rotace planety, která by způsobovala silné větry na jejím povrchu. Znamenalo by to nepraktičnosti i v tom, že by mohlo být někde výrazně snazší odstartovat než jinde a záleželo by na tom, kterým směrem letadlo vzlétá.

Tíhové zrychlení primárně určuje potřebný vztlak pro letadlo. Čím vyšší je tíhová síla, tím větší část tahu motoru musíme investovat do vztlaku. Motor musí být schopný mít tah vyšší než

$$F_{\mathrm{min}} = F_g - F_{\mathrm{vz}} = (m - \rho V)\,g\,,$$

[11] Při obsazenosti 500 cestujících dle `https://www.flyradar.cz/letadla/spotreba-paliva-dopravniho-letadla/`.

[12] `https://cs.wikipedia.org/wiki/Dekan_(uhlovodík)`

[13] `https://cs.wikipedia.org/wiki/Methan`

[14] Pokud bychom měli nést jak kyslík, tak palivo, pak by byly nároky na skladování ještě vyšší. Zejména kdybychom si nejspíše snížili jeho účinnost přidáním místní atmosféry do směsi.

[15] Atmosféra Venuše by pro naše letadlo rozhodně nebyla žádná „hitovka“. Kyselina sírová či kyselina fosforečná nejsou zrovna inertní plyny.

aby se letadlo udrželo ve vzduchu. Jak vidíme, při vysoké hustotě atmosféry je vliv tíhové síly slabší, protože na letadlo působí současně vztlaková síla, která také závisí na tíhovém zrychlení.

Srovnejme víc planet, které by měly stejné chemické složení atmosféry, stejný poloměr a u povrchu stejnou hustotu vzduchu. Planeta s vyšší střední hustotou, a tedy vyšším povrchovým tíhovým zrychlením, bude mít větší gradient tlaku. Jinak řečeno, tlak vzduchu bude rychleji klesat s výškou. To se nám může hodit, pokud naše motory mají vyšší účinnost v řidším vzduchu, ale je krátkozraké považovat to pouze za výhodu. Současně se nám může stát, že nebudeme moci přestoupat nejvyšší hory na planetě, protože letadlo nebude mít potřebný dostup.[16] Tím se vracíme k prvnímu podnadpisu, kde jsme u hustoty vzduchu zmínili odporovou sílu, jejíž diskuzi jsme ještě nevyčerpali. Pro každou výšku totiž existuje minimální a maximální rychlost, kterou musí letadlo letět, aby nespadlo. Minimální rychlost letadla je dána nutností generovat dostatečný vztlak. Protože s výškou klesá hustota vzduchu (a odporová síla, případně vztlaková síla), ale neklesá hmotnost letadla, tak se minimální nutná rychlost zvyšuje. Maximální rychlost je dána zpravidla tím, že letadla nejsou konstruována na to, aby překonala Mach 1. Když se jí letadlo blíží, tak odpor prudce vroste. Na některých částech trupu či křídel pak dochází k překročení rychlosti zvuku dříve než na jiných a běžné subsonické letadlo se stává nestabilní.[17] S rostoucí výškou nad povrchem v naší atmosféře, kde se létá, teplota zpravidla klesá. Tím pádem se snižuje i rychlost zvuku ve vzduchu a klesá i maximální bezpečná rychlost letadla. Minimální a maximální rychlost se k sobě blíží, až se pro nějakou výšku protnou.[18] Ve výšce, kde to nastane, je jediná přípustná rychlost letadla a při pouhé malé odchylce od ní dojde prakticky jistě k ztrátě vztlaku a pádu.[19] Ale nemusí to mít fatální následky. Sem tam se to může stát i u dopravních letadel. V zemské atmosféře je výhodou, že jakmile letadlo začne padat, tak se dostává do výšek, kde je širší rozpětí možných rychlostí, takže je možné jej stabilizovat. Piloti jsou trénovaní na to, aby tento manévr zvládli a letadlo vyrovnali v nižší letové hladině.

Další nevýhodou rychlého klesání tlaku s výškou je, že by bylo možné používat pouze menší počet letových hladin pro zachování bezpečných rozestupů mezi letadly. To by byl logistický problém, který by vyvstanul v čase, kdy by letadla na planetě používalo mnoho jejích obyvatel. Na Zemi jsme na to už narazili, ale vesmírné kolonizátory by to pravděpodobně nemuselo několik prvních let tolik trápit.

Teplota

Důležitá je jak teplota u povrchu planety, tak teplota atmosférického profilu. Pokud by se jednalo o atmosféru podobnou Zemi, tak bychom čekali pokles teploty s výškou nad povrchem planety v rámci většiny relevantních výšek pro létání. Ale i na Zemi je od 11 km do 20 km teplota obvykle konstantní,[20] přičemž civilní proudová letadla stoupají až nad 11 km. Samozřejmě že různé vrstvy atmosféry mohou s příchozím slunečním zářením reagovat různě, podobně jako to dělá ozonová vrstva či ionosféra.

[16] Dostup je maximální výška, do které může letadlo vystoupat. Může jít o konstrukční hodnotu udávanou výrobcem. Reálný maximální dostup letadla pak závisí na jeho aktuální hmotnosti.

[17] Limity mají i nadzvuková letadla, ale zde se věnujeme hlavně „mainstreamu“.

[18] Výstižný anglický název pro tento jev je coffin corner, viz `https://en.wikipedia.org/wiki/Coffin_corner_(aerodynamics)`.

[19] Pokud by parametry atmosféry všude závisely pouze na výšce, tak bychom se ani nemohli s letadlem dostat na či dokonce nad tuto výšku. Nicméně atmosféra není všude stejná, takže tato výška se místo od místa liší.

[20] Pro výpočty v letectví se používají parametry Standardní atmosféry, viz např. `https://cs.wikipedia.org/wiki/Standardní_atmosféra`.

Vyšší teplota znamená nižší hustotu vzduchu za stejného tlaku. To znamená nižší vztlak, resp. vyšší potřebný tah motoru pro start a let.[21]

Teplota T společně s velikostí a hustotou planety nám dává omezení na to, jaké plyny vůbec může planeta udržet ve své atmosféře. Platí, že úniková rychlost částice z povrchu[22] je

$$v_{\mathrm{esc}} = \sqrt{\frac{2GM_{\oplus}}{R_{\oplus}}}\,.$$

Střední rychlost molekuly plynu je

$$\bar{v} = \sqrt{\frac{8kT}{\pi m}} = \sqrt{\frac{8RT}{\pi M_{\mathrm{m}}}}\,,$$

kde k je Boltzmannova konstanta, m hmotnost molekuly plynu, R molární plynová konstanta a M_{m} molární hmotnost molekuly. Vidíme, že čím hmotnější molekula, tím se při stejné teplotě pohybuje pomaleji a tím spíše nepřekoná únikovou rychlost. To je jeden z důvodů, proč na terestrických planetách není v atmosféře mnoho vodíku či helia.

Všechny částice v plynu však nemají pouze jedinou rychlost. Jejich rychlosti se řídí Maxwellovým-Boltzmannovým rozdělením.[23] Distribuční funkce je

$$f(v) = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\left(\frac{M_{\mathrm{m}}}{RT}\right)^{\frac{3}{2}} v^2 \mathrm{e}^{-\frac{M_{\mathrm{m}}v^2}{2RT}}\,.$$

Ta nám říká, že pravděpodobnost, že rychlost částice spadá do intervalu $\langle v, v + \mathrm{d}v\rangle$, je rovna $f(v)\,\mathrm{d}v$. Alespoň 0,1 % částic z celkového počtu bude mít rychlost trojnásobnou či vyšší vzhledem ke střední rychlosti. Nestačí, aby pro daný plyn byla úniková rychlost vyšší než jeho střední rychlost. Je potřeba, aby byla aspoň tak pětkrát vyšší,[24] aby nedocházelo k úniku tohoto plynu z atmosféry.

Další faktor, který limituje možné částice v atmosféře, je sluneční vítr. Ten plyny kvůli srážkám odvává pryč, zejména pokud není atmosféra chráněna magnetickým polem.[25] Toto má největší vliv na částice, které mají podobnou hmotnost jako částice slunečního větru, tedy jádra vodíku a helia.

Pokud porovnáme víc podobných planet,[26] které jsou v různé vzdálenosti od svého slunce, pak vyšší teplota na povrchu by měla znamenat vyšší teplotu celého vzduchového sloupce. Pokud bychom zajišťovali rozestupy letovými hladinami, tedy letadla by létala ve stejné tlakové výšce, tak by byly vzdálenosti mezi letovými hladinami vyšší než na chladnější planetě. Pokud bychom chtěli nastoupat do stejné tlakové hladiny, pak bychom museli stoupat déle. Na druhou stranu by se mohly na této planetě nastavit bezpečné rozestupy na menší rozdíly tlaků a byl by možný provoz ve více letových hladinách.

[21] Například proto dříve některá letadla mohla z oblastí s vysokou teplotou startovat naplněná jenom na polovinu kapacity cestujících a nákladu.

[22] Mohli bychom ji vypočítat z toho, jakou kinetickou energii musí částice mít, aby unikla až do nekonečna.

[23] `https://en.wikipedia.org/wiki/Maxwell_Boltzmann_distribution#Typical_speeds`

[24] Přesněji řečeno, čím vyšší bude tento poměr, tím lépe a atmosféra nám vydrží na planetě déle.

[25] Sice to není úplně k letadlům, ale z tohoto důvodu nevznikli velcí plynoví obři v blízkosti Slunce. To totiž začalo s termojadernými reakcemi ve svém jádru ještě před zformováním planet. Sluneční vítr tedy ještě snadněji odvál plyn předtím, než se ochladil natolik, aby se mohl udržet na nějaké planetě.

[26] Podobný poloměr, hmotnost, složení atmosféry a její hmotnost.

Počasí

Rozhodně nejde létat v nestabilní atmosféře, kde by probíhaly neustálé bouřky nad celým povrchem planety. Minimálně ne se současnými letadly, pro které jsou tyto podmínky velmi nevhodné. Pokud je nad letištěm bouřka, tak letadlo obvykle divertuje[27] na jiné bezpečné letiště. Problematické jsou jak blesky, tak vítr, zejména jeho poryvy a rychlé změny.

Proberme trochu více vliv větru. Při startu i přistání letadla je potřeba, aby byl vítr buď co nejmenší, nebo aby vál směrem proti letadlu. Protivítr totiž zvětšuje vztlak letadla, což se hodí jak při startu, kdy se letadlo dostane do letuschopného režimu při nižší rychlosti vůči zemi, tak i při přistání. Rozumně silný protivítr tedy letadlu pomáhá. Nebezpečnou situací může být ztráta vztlaku způsobená větrem do zad letadla. Proto se na letišti střídá směr dráhy v užívání podle aktuální rychlosti a směru větru. Při bočním větru musí letadlo tento vítr kompenzovat natočením, což jde pouze pro nízké rychlosti. Velké rychlosti nelze bezpečně vyrovnat. Pokud má letiště pouze jednu dráhu či pouze paralelní dráhy a je silný boční vítr, pak letadlo nesmí vzlétnout ani přistát. Například na pražském letišti v Ruzyni[28] se dráha změní, pokud je zadní složka větru vyšší než $9\,\mathrm{km\cdot h^{-1}}$ nebo boční větší než $28\,\mathrm{km\cdot h^{-1}}$. Obě hodnoty jsou včetně nárazů,[29] které jsou pro pilota ještě nepříjemnější než samotný stálý vítr.

Srážky či mraky a mlha ovlivňují účinnost proudových motorů. Jsou totiž natahovány do motorů, kde se odpařují. Tím také zabírají určité místo ve spalovací části motoru a mohou vést k nedokonalému spalování směsi. Zpravidla bychom tedy čekali, že dojde ke snížení účinnosti motoru. Hypoteticky by mohlo odpaření menšího množství kapaliny vést k zvýšení tlaku, a tak i zvýšení tahu motoru. Pravděpodobnější ale je pokles výkonu. Některé proudové motory umí vzduch vstupující do motoru filtrovat tak, že do spalovací komory pouští jenom plynné částice a kapalné či pevné projdou jinou cestou. Tím se minimalizuje jejich vliv na výkon motoru. Jednoznačně problematické je, pokud je natahovaného materiálu velké množství. V tom případě může nastat tzv. „flameout“, tedy vyhasnutí motoru, čímž přijdeme o veškerý vztlak. Na Zemi se to stane zřídka, protože se letadla oblačnostem vyhýbají a malé množství jim neuškodí.

Další detaily

Povrch planety musí být dostatečně rovný, aby se na něm dalo vzlétnout a přistát s proudovým letadlem. Sice je možné povrch upravit, ale pokud by byla celá planeta hornatá, pak by stavba letišť mohla být značně komplikovaným problémem. Zejména, když by parametry atmosféry prodlužovaly startovací a přistávací dráhy a bylo by nutné vytvořit konstrukci skrz/přes několik hor.

Závěr

Určitě jsme nezmínili všechny možné vlivy, které může mít jiná situace na cizí planetě na letectví. Spíše než optimistickou předpovědí, jak vytvořit lepší planetu, šlo o výčet toho, co se může pokazit. To je ale takový základ. Jistě byste nechtěli letět v letadle, které se v průběhu letu

[27] Změní cílové letiště.

[28] Dle článku 2.21.2.4 v AIP Czech Republic na stranách AD 2-LKPR-24 až AD 2-LKPR-25, které naleznete v dokumentu `https://aim.rlp.cz/ais_data/aip/data/valid/a2-pr-txt2.pdf`.

[29] Nahodilé změny rychlosti větru. Obvykle mají nějakou maximální hodnotu, o kterou se mění, o čemž jsou informována přilétající letadla. Varování je to pouze přibližné a náraz může nastat kdykoliv. Pokud to přijde přímo v okamžiku přistání, tak si toho všimnete.

rozpustí. Letadla by se ovšem mohla přizpůsobit a upravit svůj tvar, materiály nebo i technologii motorů podle místních podmínek.

Karel Kolář
karel@fykos.cz@fykos.cz

Úloha IV.E ... dechberoucí stříkačky

13 bodů; (chybí statistiky)

Určete velikost třecí síly mezi pístem a stěnou injekční stříkačky, která vám přišla poštou.
Dano si vzpomněl na výlet do Ruska.

Úvod

Pri pohybe dvoch telies a pri ich vzájomnom dotyku sú bežne prítomné trecie sily. Ako už iste vieme, trecia sila F_t závisí od zloženia materiálov a na ich tvare, resp. na drsnosti povrchov. Tieto veličiny vieme v jednoduchých prípadoch vyjadriť pomocou koeficientu trenia. Ten sa však v praxi väčšinou určuje experimentálne. Pri klasických stredoškolských úlohách a experimentoch sa pre výpočet trecej sily používa normálová zložka tiažovej sily k povrchu, na ktorom je teleso. V tomto experimente sa budeme snažiť zistiť hodnotu koeficientu medzi stenou striekačky a piestom. K určeniu koeficientu by sme potrebovali hodnotu normálovej sily, ktorá piest tlačí k stene. Určiť túto hodnotu je však netriviálne. Preto nám zostáva meranie hodnoty trecej sily. To by sme mohli vykonať priamo, napríklad silomerom. Ukážeme si ale iný spôsob riešenia, založený na rozpínaní a stlačovaní plynu vo vnútri striekačky.

Postup merania

Ako prvé utesníme piest, čo v našom prípade bolo použitím prsta na ruke. Natiahneme piest, čím v striekačke vznikne podtlak a následne ho pustíme. Tlaková sila, ktorá bude na piest pôsobiť sa ho bude snažiť vrátiť do pôvodnej polohy, ale to sa jej nepodarí úplne, pretože proti nej bude pôsobiť trecia sila. V mieste, kde sa piest zastaví by mala byť dynamická trecia sila vyvolaná rozdielom tlakov v rovnováhe, z čoho už dokážeme vypočítať hodnotu dynamickej trecej sily.

Aby náš model fungoval, musíme piest púšťať pri spätnom pohybe pomaly (avšak kontinuálne). Ak by sme mu totiž umožnili získať vyššiu rýchlosť, tak kvôli zotrvačnosti by mohol prekmitnúť rovnovážnu polohu významnejším spôsobom a následne by sa do nej už nevrátil kvôli vyššej hodnote statického trenia (oproti dynamickej sile trenia).

V druhom prípade zase postupujeme tak, že piest stlačíme na objem menší ako pôvodný a následne ho uvoľníme do finálnej polohy, v ktorej sa opäť vyrovná tlaková a trecia sila.

Teória

Správanie plynu vnútri striekačky môžeme popísať stavovou rovnicou

$$pV = nRT\,,$$

kde p je tlak, V je objem, n predstavuje počet mólov plynu, R je univerzálna plynová konštanta a T je teplota plynu v Kelvinoch. Vzduch vo vnútri striekačky budeme považovať za adiabaticky

izolovaný, a tak počítame s tým, že si nevymieňa teplo s okolím. Adiabatický dej je popísaný vzťahom

$$pV^{\kappa} = \text{konst}\,,$$

kde κ je Poissonova konštanta. Pre vzduch je $\kappa \approx 1{,}4$. Pre silu spôsobenú vzduchom v pieste v rovnovážnej polohe máme

$$F_\mathrm{t} = F_\mathrm{v} = (p_\mathrm{a} - p)\,S\,,$$

kde S je plocha piestu, resp. prierez valcovej časti striekačky a zároveň p_a je počiatočný tlak vo vnútri piestu, ktorý je rovný atmosférickému tlaku. Dosadením z rovnice adiabatického deja dostávame

$$F_\mathrm{t} = \left(1 - \left(\frac{V_\mathrm{init}}{V_\mathrm{end}}\right)^{\kappa}\right) p_\mathrm{a} S\ , \tag{3}$$

kde V_init, V_end je počiatočný, resp. konečný objem vzduchu v pieste.

Opačným spôsobom merania by sme nechali vykonávať prácu vzduch vo vnútri striekačky. Teda postupom, že najprv piest stlačíme a potom ho necháme expandovať. Výpočet bude popísaný podobnou rovnicou

$$F'_\mathrm{t} = \left(\left(\frac{V'_\mathrm{init}}{V'_\mathrm{end}}\right)^{\kappa} - 1\right) p_\mathrm{a} S\ . \tag{4}$$

Meranie

Zistili sme podmienky merania počas experimentu. Tlak vzduchu v miestnosti bol nameraný ako $p_\mathrm{a} = (92{,}0 \pm 0{,}2)$ kPa a teplota v miestnosti bola $T_\mathrm{V} = (294{,}3 \pm 0{,}2)$ K. Experiment sme vykonali so striekačkou s objemom 3 ml. Pomocou posuvného meradla s noniusom sme odmerali priemer piestu a jeho hodnota bola $d = (9{,}14 \pm 0{,}02)$ mm. Nepresnosť posuvného meradla je 0,02 mm podľa kalibračnej normy. Prierez tak bol $S = \pi d^2/4 = (65{,}6 \pm 0{,}3) \cdot 10^{-6}\,\mathrm{m}^2$, kde sme odchýlku určili ako $\sigma(S) = 2S\frac{\sigma(d)}{d}$. Namerané hodnoty sú v tabuľke 1.

Striekačku sme mali uzavretú jedným prstom ako na obrázku 1. Po natiahnutí a opätovnom pribrzdenom pustení (bez dotyku piestu v koncovej fáze) sme odčítali hodnoty. Neistota merania objemu je $\sigma_\mathrm{m}(V) = 0{,}05$ ml.

Zo štatistického spracovania máme pre rovnovážnu polohu objem $\overline{V}_\mathrm{end} = (1{,}315 \pm 0{,}008)$ ml. Celkovú chybu objemu v rovnovážnej polohe určíme ako kvadratický súčet štatistickej chyby $\sigma\big(\overline{V}\big) = 0{,}008$ ml a chyby meradla $\sigma_\mathrm{m}(V) = 0{,}05$ ml, resp.

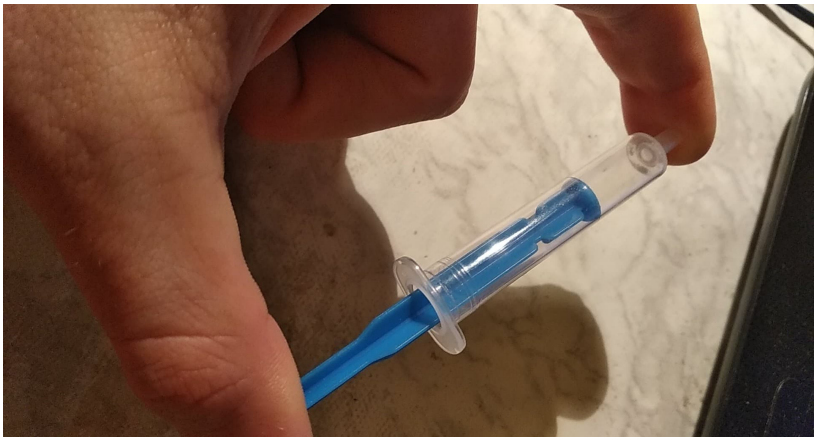
$$\sigma(V) = \sqrt{\sigma\big(\overline{V}\big) + \sigma_\mathrm{m}(V)} \doteq 0{,}05\,\mathrm{ml}\,.$$

Dostávame tak $V_\mathrm{end} = (1{,}32 \pm 0{,}05)$ ml. Dosadením do vzťahu pre treciu silu (3) vychádza

$$F_\mathrm{t} = (1{,}9 \pm 0{,}4)\ \mathrm{N}\,,$$

kde sme chybu určili zo vzorca

$$\begin{aligned}\sigma(F_\mathrm{t}) &= \sqrt{\left(\frac{\partial F_\mathrm{t}}{\partial V_\mathrm{init}}\sigma_\mathrm{m}(V)\right)^2 + \left(\frac{\partial F_\mathrm{t}}{\partial V_\mathrm{end}}\sigma(V)\right)^2 + \left(\frac{\partial F_\mathrm{t}}{\partial p_\mathrm{a}}\sigma(p_\mathrm{a})\right)^2 + \left(\frac{\partial F_\mathrm{t}}{\partial S}\sigma(S)\right)^2} = \\ &= \sqrt{\left(\kappa p_\mathrm{a} S\ \left(\frac{V_\mathrm{init}}{V_\mathrm{end}}\right)^{\kappa}\right)^2 \left(\left(\frac{\sigma_\mathrm{m}(V)}{V_\mathrm{init}}\right)^2 + \left(\frac{\sigma(V)}{V_\mathrm{end}}\right)^2\right) + F_\mathrm{t}^2 \left(\left(\frac{\sigma(p_\mathrm{a})}{p_\mathrm{a}}\right)^2 + \left(\frac{\sigma(S)}{S}\right)^2\right)}\,.\end{aligned}$$



Obr. 1: Meranie s injekčnou striekačkou.

Porovnanie opačného pohybu piestu

Pre porovnanie vyskúšame aj druhú metódu, kedy bude konať prácu od trecej sily vzduch v injekčnej striekačke. Postupujeme podobne, a teda na začiatku si zvolíme objem (kvôli presnosti merania maximálny možný), postupne stlačíme vzduch na nami zvolené objemy a následne pomaly (približne niekoľko sekúnd) púšťame, avšak aby sme nijako neovplyvnili koncovú fázu zastavenia. Výsledky sú v tabuľke 2. Neistota merania objemu je $\sigma_{\mathrm{m}}(V) = 0{,}05\,\mathrm{ml}$.

Z údajov, kedy bol najmenší objem vyšší ako 1,5 ml tak dostávame údaj pre rovnovážnu polohu $\overline{V}'_{\mathrm{end}} = (2{,}29 \pm 0{,}02)$ ml. Kde sme kombinovanú odchýlku opäť získali pomocou štatistickej a systematickej chyby. Aj v tomto prípade bola štatistická chyba zanedbateľná a vyšlo $V'_{\mathrm{end}} = (2{,}29 \pm 0{,}05)$ ml.

Podľa (4) sme spočítali hodnotu trecej sily

$$F'_{\mathrm{t}} = (2{,}8 \pm 0{,}3)\ \mathrm{N}\,.$$

Chybu sme určili rovnako ako pri predchádzajúcej metóde.

Diskusia

Pri experimente bolo prítomných viacero faktorov, ktoré mohli ovplyvniť výsledky merania. Počítali sme s modelom ideálneho plynu, a to samozrejme v reálnom svete len približuje fyzikálnu skutočnosť. Ako ďalší fakt, ktorý ovplyvňoval meranie bolo použitie modelu adiabatického deja. Ten predpokladá, že nie je prítomná výmena tepla s okolím (prípadne, že deje prebehnú tak rýchlo, aby sa teplo nestihlo predať). Dĺžka trvania experimentu bola len niekoľko sekúnd napriek pomalšiemu uvoľňovaniu.

Výmena tepla medzi vzduchom vo vnútri striekačky a medzi stenami striekačky nepochybne prebiehala. Skutočný dej mal preto správanie medzi adiabatickým a izotermickým procesom. Ďalším zdrojom tepla bol aj fakt, že sme striekačku pridržiavali prstami, ktoré mali vyššiu teplotu ako okolie. Avšak tepelné výmeny sme z dôvodu relatívne krátkeho meracieho procesu zanedbali. Zároveň je plast pomerne dobrým izolantom.

Tab. 1: Meranie zastavenia piestu z rôznych maximálnych objemov pre začiatočný objem $V_{\text{init}} = (1{,}00 \pm 0{,}05)$ ml a natiahnutia na objem $V_{\max}$.

Meranie	$V_{\max}$ / ml	V_{end} / ml
1	1,30	1,30
2	1,40	1,35
3	1,60	1,30
4	1,80	1,30
5	2,00	1,30
6	2,20	1,30
7	2,40	1,30
8	2,60	1,35
9	2,80	1,35
10	3,00	1,30

Predpokladali sme, že vzduch neuniká pri vyššom tlaku ako bol tlak okolia. Rovnako sme zanedbali aj prípadné prúdenie do vnútra striekačky. A to pre miesto, ktoré izoloval piest, a tiež pre utesnenie rukou na výstupe striekačky. Tlak atmosféry na strane piestu sme uvažovali za konštantný v každom okamihu.

V prípade opačného postupu, kedy sme vzduch stlačili a sledovali jeho návrat (expanziu), si musíme uvedomiť, že vtedy koná prácu vzduch vo vnútri striekačky. Odobrané teplo cez steny striekačky vedením tepla zo systému znamenalo, že tlak mohol byť v skutočnosti nižší ako sme namerali. To sa dialo prostredníctvom odovzdania tepla okoliu (steny striekačky). Hodnota merania F_{t}' v tomto smere tak pravdepodobne horšie zodpovedá adiabatickému modelu z hľadiska malých rozmerov sledovaného objektu.

V prvom postupe sa vzduch mierne zohrieval od okolia, čo naopak zvyšovalo tlak vo vnútri. Ďalšou skutočnosťou, ktorá mohla ovplyvniť merania bolo, že sme predpokladali vo všetkých miestach rovnakú treciu silu, avšak toto nemuselo byť splnené. Rovnako účinok trecej sily môže byť iný pri pohybe jedným alebo opačným smerom. Najvýznamnejším zdrojom odchýlky bolo najmä určenie objemu a s tým spojené určenie týchto hodnôt. Presnejšia stupnica by vedela túto nepresnosť znížiť.

Taktiež sme pri porovnávaní metód neuvažovali prípadnú zmenu koeficientu trenia pri pohybe opačným smerom. Z údajov, ktoré zodpovedajú pre najväčšiu nami vytvorenú kompresiu (teda najmenšie objemy) vidíme, že už zreteľne dochádza k výraznejším stratám energie.

Záver

Zmerali sme silové pôsobenia a uviedli sme dôvody, pre ktoré by mala byť metóda konania práce atmosférou rozumnejšou resp. správnou voľbou. Hodnota trecej sily tak bola $F_{\text{t}} = (1{,}9 \pm 0{,}4)$ N v smere od väčších objemov k menším. V opačnom smere (kedy prácu konal vzduch vo vnútri) sme touto aproximáciou dostali $F_{\text{t}}' = (2{,}8 \pm 0{,}3)$ N. Táto hodnota je podľa očakávaní vyššia,

Tab. 2: Meranie zastavenia piestu po kompresii na $V_{\min}$ a následnej expanzii vzduchu pri začiatočnom objeme $V'_{\text{init}} = (3{,}00 \pm 0{,}05)$ ml.

Meranie	$\frac{V_{\min}}{\text{ml}}$	$\frac{V'_{\text{end}}}{\text{ml}}$
1	2,30	2,35
2	2,20	2,30
3	2,10	2,35
4	2,00	2,30
5	1,80	2,25
6	1,60	2,20
7	1,40	2,25
8	1,20	2,15
9	1,00	2,10
10	0,80	2,00
11	0,60	1,95
12	0,40	1,85

a to z dôvodu, že prácu konal vzduch vo vnútri striekačky a nie okolitá atmosféra.

Ivan Hudák
hudakivan@fykos.cz@fykos.cz

Úloha IV.S ... oscilace oxidu uhličitého

10 bodů; (chybí statistiky)

Budeme modelovat kmity v molekule oxidu uhličitého. Jedná se o lineární molekulu s jedním atomem uhlíku mezi dvěma atomy kyslíku, ležícími společně na jedné přímce. Uvažujme pouze kmity podél této přímky. Předpokládejme, že pro malé výchylky lze molekulu modelovat jako spojení uhlíkového atomu s každým z kyslíkových pomocí pružin o tuhosti k. Atom uhlíku má hmotnost M, hmotnost kyslíkového atomu je m.

Sestavte rovnice určující síly, které působí na atomy při malých výchylkách podél osy uvažované molekuly. Ta je symetrická vůči záměně některých atomů. Vyjádřete tuto symetrii pomocí matice působící na vámi definovaný vektor výchylek. Dále určete vlastní vektory a vlastní čísla této matice. Takováto symetrie však není kompletní – vysvětlete, které stupně volnosti nezahrnuje.

Dále sestrojte maticovou rovnici popisující kmity systému. Dosazením vlastních vektorů z matice symetrie, které rozšíříte o symetrií neomezené stupně volnosti, určete normální mody systému. Dále spočítejte jejich úhlovou rychlost/frekvenci a načrtněte směry oscilací. Jaké další mody (stále pouze ve směru osy molekuly) by systém mohl obsahovat? Určete frekvenci a směr pro každý mod, jejž se vám podaří nalézt. *Štěpán přemýšlel o molekulách.*

Zvolme soustavu souřadnic s počátkem na pozici uhlíkového atomu v rovnovážném stavu. Výchylky atomů z jejich rovnovážné polohy označme v pořadí x_1, X a x_2 pro levý kyslík, uhlík a pravý kyslík. Všechny výchylky měříme ve směru rostoucí souřadnice x. Na kyslíkové atomy

budou působit síly

$$F_1 = k\,(X - x_1)\ ,$$
$$F_2 = k\,(X - x_2)\ .$$

Sílu působící na atom uhlíku spočítáme jako

$$F = -F_1 - F_2 = k\,(x_1 + x_2 - 2X)\ .$$

Vidíme, že záměnou indexů kyslíkových atomů $1 \longleftrightarrow 2$ dostaneme přesně stejnou soustavu rovnic. Definujme vektor výchylek jako

$$\mathbf{v} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ X \end{pmatrix}\ .$$

Matice symetrie S má potom tvar

$$S = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\ .$$

Abychom našli vlastní vektory, musíme nejdřív určit determinant matice $S - \lambda I$, kde λ je vlastní číslo. Tento determinant musí být roven nule pro netriviální vlastní vektory, neboli

$$\begin{vmatrix} -\lambda & 1 & 0 \\ 1 & -\lambda & 0 \\ 0 & 0 & 1-\lambda \end{vmatrix} = 0\,.$$

Tato matice je blokově diagonální, takže platí

$$\begin{vmatrix} -\lambda & 1 & 0 \\ 1 & -\lambda & 0 \\ 0 & 0 & 1-\lambda \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -\lambda & 1 \\ 1 & -\lambda \end{vmatrix} (1-\lambda) = \left(\lambda^2 - 1\right)(1-\lambda) = 0\,.$$

Vlastní čísla jsou $\lambda = \pm 1$ s tím, že pro $\lambda = 1$ očekáváme dva vektory – jedná se o dvojitý kořen rovnice.

Pro $\lambda = -1$ určíme vlastní vektor jako

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}\ ,$$

kde α, β a γ jsou komponenty vlastního vektoru. Jediné netriviální řešení dostaneme pro

$$\mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}\ ,$$

ale jakýkoliv skalární násobek tohoto vektoru také funguje. Pro kořen $\lambda = 1$ řešíme rovnici

$$\begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}\ .$$

Koeficient γ zřejmě není nijak omezen. Toto představuje neúplnost naší symetrie – permutace výchylek atomů kyslíku neklade žádné nároky na výchylku uhlíku. Ta představuje nezahrnutý stupeň volnosti. Toto je ovšem pravda pouze pro vektory, které odpovídají $\lambda = 1$. Pro $\lambda = -1$ jsme viděli, že výchylka uhlíku je symetrií donucena k nule.

Máme tedy dva vlastní vektory, které odpovídají $\lambda = 1$, a sice

$$\mathbf{v}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{v}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

nebo jejich libovolnou lineární kombinaci.

Nyní sestrojme dynamickou rovnici popisující tento systém. Síly působící na atomy lze přepsat jako zrychlení výchylek atomů vynásobené jejich hmotnostmi. Pro tato zrychlení můžeme provést fourierovskou substituci, abychom dostali soustavu rovnic. Například rovnice pro atom kyslíku nalevo se změní na

$$m\ddot{x}_1 = k\,(X - x_1) \quad \Rightarrow \quad -m\omega^2 x_1 = k\,(X - x_1)\,,$$

separací proměnných X a x_1 získáme

$$kX + \left(m\omega^2 - k\right) x_1 = 0\,.$$

Všechny rovnice lze shrnout jako

$$\begin{pmatrix} m\omega^2 - k & 0 & k \\ 0 & m\omega^2 - k & k \\ k & k & M\omega^2 - 2k \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ X \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Dosadíme nejprve vektor typu $\mathbf{v}_1$. Pro ten platí (dovolíme-li libovolnou hodnotu skalárního činitele)

$$\begin{pmatrix} m\omega^2 - k & 0 & k \\ 0 & m\omega^2 - k & k \\ k & k & M\omega^2 - 2k \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha \\ -\alpha \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Velmi rychle zjistíme, že tato soustava rovnic má řešení při

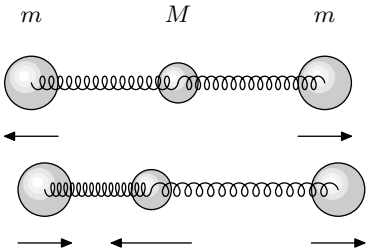
$$\left(m\omega^2 - k\right) \alpha = 0\,,$$

čímž získáváme první frekvenci oscilací

$$\omega_1 = \sqrt{\frac{k}{m}}\,.$$

Dále dosadíme obecnou superpozici vektoru $\mathbf{v}_2$ a vektoru $\mathbf{v}_3$, což odpovídá rozšíření o nezahrnuté stupně volnosti v symetrii. Dostáváme soustavu rovnic

$$\begin{pmatrix} m\omega^2 - k & 0 & k \\ 0 & m\omega^2 - k & k \\ k & k & M\omega^2 - 2k \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha \\ \alpha \\ \gamma \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$



Obr. 2: Naznačení pohybu oscilujících modů. Při pohybu vždy platí zachování hybnosti a celková hybnost při těchto modech je konstantní. Při translačním modu je konstantní i vzdálenost mezi atomy.

První a druhá rovnice jsou stejné, třetí je jiná. Máme tak dvě různé rovnice pro dvě neznámé

$$\left(m\omega^2 - k\right)\alpha + k\gamma = 0\,,$$
$$2k\alpha + \left(M\omega^2 - 2k\right)\gamma = 0\,.$$

Z první rovnice si vyjádříme parametr

$$\gamma = \left(1 - \frac{m}{k}\omega^2\right)\,,$$

který dosadíme ho do druhé, čímž získáme

$$\left(2k + \left(M\omega^2 - 2k\right)\left(1 - \frac{m}{k}\omega^2\right)\right)\alpha = 0\,,$$
$$\omega^2\left(2m + M\left(1 - \frac{m}{k}\omega^2\right)\right)\alpha = 0\,.$$

Jedno řešení je $\omega = 0$, při kterém systém neosciluje. Druhé řešení je

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{\frac{mM}{M+2m}}}\,,$$

kde bereme v úvahu pouze kladný kořen. Pro neoscilující mod je γ dáno jako

$$\gamma = \alpha\,,$$

a vzdálenosti mezi atomy jsou v tomto modu konstantní, jak bychom očekávali. Pro oscilující mod platí

$$\gamma = \left(1 - \frac{m}{k}\frac{M+2m}{mM}k\right)\alpha = \left(1 - \frac{M+2m}{M}\right)\alpha = -\frac{2m}{M}\alpha$$

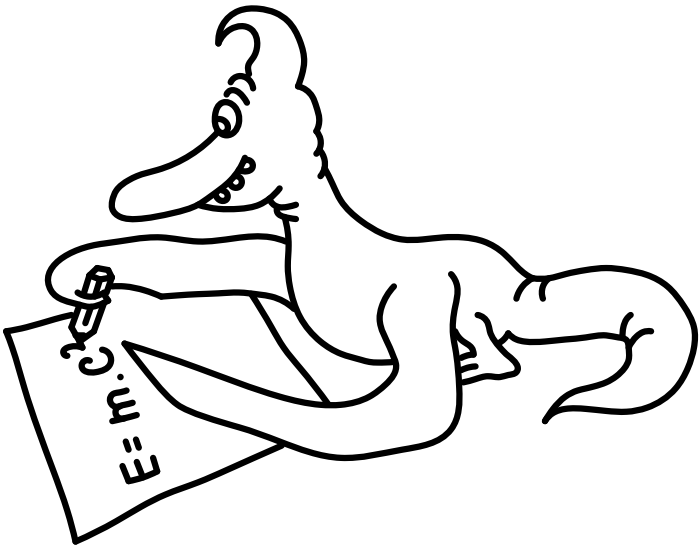
a vlastní vektory normálních modů jsou

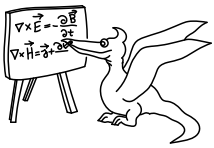
$$\mathbf{v}_2' = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -\frac{2m}{M} \end{pmatrix}\,, \quad \mathbf{v}_3' = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}\,.$$

Tímto způsobem jsme získali tři vektory pro systém s třemi stupni volnosti - žádné další normální mody nemohou existovat. Nicméně pokud byl v řešení opomenut případ $\omega = 0$, lze ho odvodit pouze na základě fyzikální úvahy – systém je translačně invariantní čili se může posouvat konstantní rychlostí ve stejném uspořádání atomů. Pro kontrolu můžeme dosadit řešení, kdy všechny souřadnice vykonávají stejnou rychlostí rovnoměrný pohyb, tj. lze zapsat $X = x_1 = x_2 = x_0 + v_0 t$, kde x_0 a v_0 jsou konstanty. Takový pohyb bychom nazvali translační mod.

Nakonec poznamenejme, že druhý oscilující mod můžeme v reálném systému pozorovat jako absorpci světla s vlnovým číslem okolo $2\,349\,\mathrm{cm}^{-1}$. První oscilující mod není v přímé absorpci vidět, jelikož nemá dipólový moment. Tato absorpce je jedním z důležitých komponentů skleníkového efektu.

Štěpán Marek
stepan.marek@fykos.cz@fykos.cz





Seriál: Vlny

Vlny jsou jevem, při kterém vícero oscilátorů rozmístěných v prostoru osciluje dohromady tak, že vytváří určitou předvídatelnou dynamiku. Fyzika vln má mnoho společného s fyzikou oscilací a vlastně představuje pouze rozšíření našich předchozích poznatků z diskrétních systémů do kontinuálních systémů. Obdobně jako jsme pro oscilátory vždy museli odvodit dynamické rovnice pohybu, musíme pro vlny odvodit tzv. vlnovou rovnici. To si předvedeme na jednoduchém příkladu napnuté struny, kde odvodíme některé základní pojmy, o které musíme naše chápání oscilací rozšířit, abychom pak dokázali popsat vlnění.

Napnutá struna

Uvažujme strunu, která se nachází podél osy x tak, že jeden její konec je v počátku a druhý v bodě l. Na strunu působí napětí[30] T a to vždy v tečném směru. Délková hmotnost struny je λ, celkem tedy váží $m = \lambda l$.

Dále předpokládejme, že struna kmitá pouze kolmo na osu x. Výchylku z rovnovážné polohy označíme jako $u(x,t)$, jelikož se může měnit jednak s polohou x a zároveň s časem t.

Uvědomme si, že toto je velmi silný předpoklad. Můžeme si jej ale odůvodnit jednoduchou úvahou – uvažujeme pouze velmi malé výchylky, takže tečný směr na strunu je všude přibližně rovnoběžný s osou x. To znamená, že napětí ve směru x je téměř rovno T podél celé délky struny. Protože na každý její úsek působí z obou stran stejně, žádný z nich nemá důvod pohybovat se ve směru osy x.

Náš úkol zní následovně – při určitém profilu výchylek $u(x,t)$ určit, jaké jsou síly působící na jednotlivé části struny a jak jednotlivé úseky struny zrychlují. Zřejmě nás zajímá pouze síla ve směru výchylky. Ukážeme si, jak spočítat její změnu podél x.

Zastavme na chvíli čas a předpokládejme $u = u(x)$. Úsek se středem v bodě x působí na své sousedy silou T v tečném směru k funkci u. Označíme-li sklon tečny od vodorovného směru φ, bude platit $u' = \operatorname{tg}\varphi \approx \varphi$,[31] protože, jak jsme již řekli dříve, struna je skoro vodorovná a úhel φ je velmi malý.[32] Zde u' značí derivaci funkce u podle prostorové souřadnice. Svislá složka této síly bude $T_y = T\sin\varphi \approx T\varphi$. Má-li náš úsek délku $\mathrm{d}x$ a jeho těžiště se nachází v bodě x, znamená to, že jeho pravý okraj bude mít souřadnici $x + \mathrm{d}x/2$. V tomto bodě na něj ve svislém směru působí napětí $T_y(x + \mathrm{d}x/2)$. Obdobně pro levý okraj. Změnu síly můžeme spočítat jako rozdíl mezi pravým a levým okrajem, neboli

$$\mathrm{d}F = T_y\Big(x + \frac{\mathrm{d}x}{2}\Big) - T_y\Big(x - \frac{\mathrm{d}x}{2}\Big) = T\left(\varphi\Big(x + \frac{\mathrm{d}x}{2}\Big) - \varphi\Big(x - \frac{\mathrm{d}x}{2}\Big)\right).$$

[30] Napětím zde myslíme napěťovou sílu, nikoliv napěťovou sílu na jednotku plochy, jak se někdy napětí definuje.

[31] První rovnost jednoduše platí, stačí si uvědomit, že jak funkce $\operatorname{tg}\varphi$, tak u' odpovídají sklonu tečny k funkci $u(x)$ v daném bodě (pro malý element $\mathrm{d}x$ a odpovídající změnu $\mathrm{d}u$ platí $\mathrm{d}u = \operatorname{tg}\varphi\,\mathrm{d}x$).

[32] Opravdu, nakreslete si funkce $y = \operatorname{tg}x$ a $y = x$ vedle sebe a zjistíte, že pro malé výchylky je jejich rozdíl zanedbatelný. To je princip lineární aproximace v nějakém bodě (nahrazení funkcí přímkou, která má v daném bodě stejný sklon jako původní funkce).

Funkci $\varphi(x)$ sice neznáme, ale pro velmi malé a jí můžeme lokálně aproximovat[33] její tečnou

$$\varphi(x+a) \approx \varphi(x) + \varphi'(x)\, a + \dots\,.$$

Za a dosadíme $\pm\,\mathrm{d}x/2$, bude tedy dokonce libovolně malé. Dosazením dostáváme

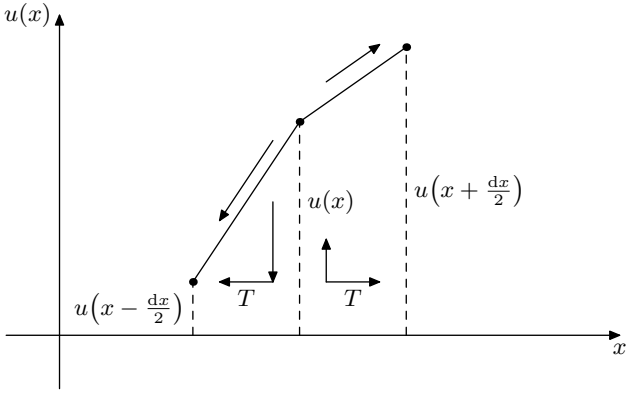
$$\mathrm{d}F \approx T\left(\left(\varphi(x) + \varphi'(x)\,\frac{\mathrm{d}x}{2}\right) - \left(\varphi(x) - \varphi'(x)\,\frac{\mathrm{d}x}{2}\right)\right) = T\varphi'(x)\,\mathrm{d}x\,.$$

Máme výsledek[34]

$$\frac{\mathrm{d}F}{\mathrm{d}x} = T\varphi' \approx Tu'' = T\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\,.$$

Zdůrazněme, že jsme pracovali pouze s funkcí $u = u(x)$ při zastaveném čase. Zajímá-li nás časový vývoj systému, musíme přejít k původní funkci $u = u(x,t)$ a k parciálním derivacím. Zrychlení spočítáme z druhého Newtonova zákona. Úsek o délce $\mathrm{d}x$ váží $\mathrm{d}m = \lambda\,\mathrm{d}x$, pro sílu platí $\mathrm{d}F = \mathrm{d}m\ddot{u}$, kde tečka tentokrát znamená časovou derivaci. Výsledná vlnová rovnice má tvar

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{T}{\lambda}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\,.$$



Obr. 3: Úsek struny o délce $\mathrm{d}x$, na který působí síly od sousedních úseků. Ty jsou znázorněny v rozložení do horizontálního a vertikálního směru.

V tomto případě budeme konstantní hodnotu T/λ označovat jako v^2. Rozměrovou analýzou lze určit, že v má jednotku rychlosti, a ukazuje se, že v skutečně odpovídá tzv. fázové rychlosti vln.

Vlnová rovnice plní stejnou roli jako rovnice pro zrychlení při zkoumání oscilací jednoho oscilátoru. Můžeme také nalézt obdobu přirozené frekvence pro jeden oscilátor, ale nejprve si ukážeme některé možnosti řešení vlnové rovnice.

[33] Opět používáme lineární aproximaci. Pro obecnou aproximaci bychom použili Taylorovu řadu, kterou si v případě zájmu můžete vyhledat. Zde nám stačí jen její první dva členy, protože další už by byly pro malé $\mathrm{d}x$ zanedbatelné.

[34] U funkce $u(x,t)$ nahrazujeme obyčejné derivace, např. $\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}$, derivacemi parciálními, např. $\frac{\partial u}{\partial x}$, což je běžné pro funkce, které závisí na více proměnných. Rozdíl je v podstatě v tom, že u obyčejné derivace bychom ještě museli uvažovat, jak jednotlivé parametry funkce u (tedy x a t) závisí na sobě navzájem, u parciální nemusíme.

Rovinné vlny

Jelikož vlnění se vlastně skládá z jednotlivých oscilátorů, můžeme zkusit zjistit, zda jednoduché oscilace mohou být řešením vlnové rovnice. Předpokládejme tedy, že řešení vlnové rovnice bude ve tvaru

$$\hat{u}(x,t) = U(x)\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t}\,,$$

kde $U(x)$ je funkce určující amplitudu oscilací v závislosti na pozici. Opět, řešení vlnové rovnice musí být reálné, ale zavedením komplexního řešení $\hat{u}(x,t)$ si zjednodušíme algebru. Reálné řešení pak získáme jako $u(x,t) = \mathrm{Re}\,\hat{u}(x,t)$. Dosazením do vlnové rovnice dostáváme

$$\begin{aligned} U(x)\,\frac{\mathrm{d}^2\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t}}{\mathrm{d}t^2} &= v^2\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t}\,\frac{\mathrm{d}^2U}{\mathrm{d}x^2}\,,\\ U(x)\left(-\omega^2\right)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t} &= v^2\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t}\,\frac{\mathrm{d}^2U}{\mathrm{d}x^2}\,,\\ \frac{\mathrm{d}^2U}{\mathrm{d}x^2} &= -\frac{\omega^2}{v^2}U(x)\ . \end{aligned}$$

Tuto rovnici známe, pouze jsme místo proměnné pozice používali čas – jedná se o rovnici jednoduchých harmonických kmitů. Řešení tedy můžeme psát jako

$$U(x) = A\mathrm{e}^{\mathrm{i}kx}\,,$$

kde A je (potenciálně komplexní) konstanta, a k je reálné číslo. Většinou nazýváme k *vlnové číslo*. Dosazením do předchozí rovnice pak dostáváme vztah

$$-k^2A\mathrm{e}^{\mathrm{i}kx} = -\frac{\omega^2}{v^2}U(x) \quad\Rightarrow\quad \omega^2 = k^2v^2\,.$$

Tato rovnice se nazývá *disperzní vztah* – určuje, jak se frekvence vlny mění s vlnovým číslem příslušícím dané vlně. Konečně, komplexní řešení vlnové rovnice je

$$\hat{u}(x,t) = A\mathrm{e}^{\mathrm{i}(kx-\omega t)}\,.$$

Reálné řešení je $u(x,t) = |A|\cos(kx-\omega t+\varphi)$, kde

$$A = |A|\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi}$$

udává amplitudu $|A|$ i fázový posun φ.

Podobně jako u oscilací, vlnová rovnice je lineární rovnice, a tím pádem můžeme její řešení tvořit lineárními kombinacemi známých řešení. Například kombinace

$$\hat{u}'(x,t) = A\mathrm{e}^{\mathrm{i}(kx-\omega t)} + B\mathrm{e}^{\mathrm{i}(-kx-\omega t)}$$

je také řešením vlnové rovnice.

Rovinné vlny lze také popsat jako translaci (posouvání) profilu $U(x)$ s ubíhajícím časem t. Abychom toto chování lépe viděli, píšeme

$$\hat{u}(x,t) = A\mathrm{e}^{\mathrm{i}(kx-\omega t)} = A\mathrm{e}^{\mathrm{i}k\left(x-\frac{\omega}{k}t\right)} = A\mathrm{e}^{\mathrm{i}k(x-vt)}\,,$$

kde jsme využili disperzní vztah (a předpokládali, že ω i k jsou kladné). Vidíme, že vlna se v tomto případě posouvá doprava (směrem k rostoucímu x). Na druhou stranu, v případě, že máme řešení

$$\hat{u}(x,t) = A\mathrm{e}^{\mathrm{i}(-kx-\omega t)} = A\mathrm{e}^{-\mathrm{i}k(x+vt)}\,,$$

vlna se posouvá doleva (ke klesajícímu x).

Fourierovská substituce

Obdobně jako při oscilacích, diferenciální vlnovou rovnici můžeme nahradit algebraickou rovnicí. Pro řešení rovnic pomocí rovinných vln (pohybujících se doprava) použijeme

$$\frac{\partial}{\partial t} \to -\mathrm{i}\omega\,, \qquad \frac{\partial}{\partial x} \to \mathrm{i}k\,,$$
$$\frac{\partial^2}{\partial t^2} \to -\omega^2\,, \quad \frac{\partial^2}{\partial x^2} \to -k^2\,.$$

Aplikací této substituce můžeme odvodit disperzní vztah přímo z vlnové rovnice.

Okrajové podmínky

Jelikož vlny nevyplňují celý prostor, konkrétní tvar řešení je okrajem oblasti, ve které existují, omezen pomocí tzv. okrajových podmínek. Například pokud máme strunu napnutou mezi dvěma body, pak se v bodech, kde je uchycená, nehýbe. Naopak pokud bychom měli lano uchycené v jednom bodě a v druhém by bylo volné, pak by se v jednom bodě nehýbalo a v druhém by byla síla, která lano vrací do rovnovážné polohy, nulová. To odpovídá podmínce

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 0$$

v daném bodě. Tyto body efektivně představují rozhraní, od kterých se vlny mohou odrážet. V obecném případě by vlny mohly také pronikat za rozhraní, ale ve výše uvedených případech vlny nemohou existovat za rozhraním a proto dochází pouze k odrazu. Ten lze vyjádřit tak, že předpokládáme formu řešení, které je superpozicí dvou rovinných vln pohybujících se opačným směrem, potenciálně s rozdílnou amplitudou a fázovým posunem. Příklad takového řešení si ukážeme níže.

Stojaté vlnění

Mějme strunu, která je napnutá mezi dvěma body, na kterých se nehýbe. Výchylka struny z napnuté polohy u splňuje vlnovou rovnici

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{T}{\lambda}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\,.$$

Mezi body je celková vzdálenost L. Naším úkolem bude určit stabilní dynamiku struny, tj. určit $u(x,t)$, které vede pouze k opakování stejného cyklu. Okrajové podmínky můžeme určit po zavedení souřadnicové soustavy. Zvolme ji tak, že jeden z bodů je v počátku souřadnic, a druhý tedy podél osy x ve vzdálenosti L. Pak platí

$$u(0,t) = 0 = u(L,t)\ .$$

Předpokládejme nyní, že hledané řešení se skládá ze dvou rovinných vln – jedné, která se pohybuje doprava, a jedné, která se pohybuje doleva. Pak pro komplexní výchylku platí

$$\hat{u}(x,t) = A\mathrm{e}^{\mathrm{i}(kx-\omega t)} + B\mathrm{e}^{\mathrm{i}(-kx-\omega t)}\,.$$

Z vlnové rovnice lze odvodit disperzní vztah

$$\omega^2 = v^2k^2\,,$$

kde $v = \sqrt{\frac{T}{\lambda}}$. Neznámé jsou tedy A, B a k, jelikož ω je určená jako $\omega = vk$ (předpokládáme, že k je kladné – záporné k je obsažené ve vlně pohybující se druhým směrem). První okrajová podmínka vede na

$$0 = \hat{u}(0,t) = A\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t} + B\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t} \quad \Rightarrow \quad A = -B\,,$$

druhá implikuje

$$\begin{aligned} 0 &= \hat{u}(L,t) = -B\mathrm{e}^{\mathrm{i}(kL-\omega t)} + B\mathrm{e}^{-\mathrm{i}(kL+\omega t)}\,, \\ 0 &= B\left(\mathrm{e}^{-\mathrm{i}kL} - \mathrm{e}^{\mathrm{i}kL}\right)\,. \end{aligned}$$

S použitím $\mathrm{e}^{\mathrm{i}x} = \cos x + \mathrm{i}\sin x$ můžeme psát

$$\begin{aligned} 0 &= B\left(\cos(kL) - \mathrm{i}\sin(kL) - \cos(kL) - \mathrm{i}\sin(kL)\right)\,, \\ 0 &= -2\mathrm{i}B\sin(kL)\,. \end{aligned}$$

Vidíme, že buď máme triviální řešení $B = 0$, kdy se struna nevlní, nebo platí

$$kL = n\pi\,,$$

kde n je celé (dle předpokladu kladné) číslo, což vede k tomu, že $\sin(kL) = 0$. Neurčené konstanty jsou tedy pouze absolutní hodnota a fáze B, což odpovídá amplitudě a globální fázi vlnění. Výchylka struny splňuje (dosazením známých veličin)

$$\hat{u}(x,t) = B\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\sqrt{\frac{T}{\lambda}}\frac{n\pi}{L}t}\left(\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{n\pi}{L}x} - \mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{n\pi}{L}x}\right) = B\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\sqrt{\frac{T}{\lambda}}\frac{n\pi}{L}t}\,(-2\mathrm{i})\sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right)\,.$$

S použitím $B = |B|\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi}$ a $-\mathrm{i} = \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{\pi}{2}}$ máme

$$\hat{u}(x,t) = 2\,|B|\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\left(\varphi-\frac{\pi}{2}\right)}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\sqrt{\frac{T}{\lambda}}\frac{n\pi}{L}t}\sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right)\,.$$

Reálná výchylka je

$$\begin{aligned} u(x,t) = \mathrm{Re}\,\hat{u}(x,t) &= 2\,|B|\cos\left(\sqrt{\frac{T}{\lambda}}\frac{n\pi}{L}t - \varphi + \frac{\pi}{2}\right)\sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right) = \\ &= -2\,|B|\sin\left(\sqrt{\frac{T}{\lambda}}\frac{n\pi}{L}t - \varphi\right)\sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right)\,. \end{aligned}$$

Pokud bychom chtěli určit $|B|$ či φ (a popřípadě n), museli bychom znát výchylku v celém rozsahu struny v určitý čas. Například bychom mohli vědět, že v čase $t = 0$ platí

$$u(x,0) = C\sin\left(\frac{\pi}{L}x\right)\,,$$

kde C je známá reálná konstanta. Potom bychom měli

$$C\sin\left(\frac{\pi}{L}x\right) = -2\,|B|\sin(-\varphi)\sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right)\,.$$

Zřejmě by tedy muselo platit $n = 1$, $\varphi = \frac{\pi}{2}$ a $|B| = \frac{C}{2}$. Obecný vývoj by byl

$$u(x,t) = -2\frac{C}{2}\sin\left(\sqrt{\frac{T}{\lambda}}\frac{\pi}{L}t - \frac{\pi}{2}\right)\sin\left(\frac{\pi}{L}x\right) = C\cos\left(\sqrt{\frac{T}{\lambda}}\frac{\pi}{L}t\right)\sin\left(\frac{\pi}{L}x\right)\,.$$

V tomto výrazu už není žádná neznámá, tudíž jsme zvládli popsat dynamiku struny. Všimněme si, že k tomu bylo zapotřebí použít superpozici dvou řešení – jedné vlny pohybující se doprava a jedné doleva. Toto je typické pro stojaté vlnění, jedná se o reprezentaci odrážení vlnění od okrajů systému, jak bylo uvedeno v předchozí sekci.

Tlumení

Tlumení, tj. ztráta energie vlnění, může být přítomno ve vlnové rovnici skrze členy obsahující derivace prvního stupně. Tyto derivace mohou být buďto vzhledem k poloze x nebo vzhledem k času t. Probereme pouze příklad s derivací vzhledem k času, ale příklad s derivací vzhledem k poloze je velmi podobný.

Uvažujme rovnici

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + \gamma\frac{\partial u}{\partial t} = v^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\,,$$

kde γ je síla tlumení. Pro komplexní výchylku můžeme provést fourierovskou substituci

$$-\omega^2\hat{u} - \mathrm{i}\gamma\omega\hat{u} = -k^2v^2\hat{u}$$

a disperzní vztah bude

$$\omega^2 + \mathrm{i}\gamma\omega = k^2v^2\,.$$

Máme před sebou netriviální úkol – je potřeba vyřešit komplexní kvadratickou rovnici. Chybám se nejlépe vyhneme pomocí doplnění na čtverec

$$\omega^2 + \mathrm{i}\gamma\omega - \frac{\gamma^2}{4} + \frac{\gamma^2}{4} = \left(\omega + \mathrm{i}\frac{\gamma}{2}\right)^2 + \frac{\gamma^2}{4} = k^2v^2\,,$$
$$\left(\omega + \mathrm{i}\frac{\gamma}{2}\right)^2 = k^2v^2 - \frac{\gamma^2}{4}\,.$$

Nyní máme dvě možnosti. Buď je tlumení relativně slabé a platí $k^2v^2 > \frac{\gamma^2}{4}$, pak

$$\omega + \mathrm{i}\frac{\gamma}{2} = \pm\sqrt{k^2v^2 - \frac{\gamma^2}{4}} \quad\Rightarrow\quad \omega = -\mathrm{i}\frac{\gamma}{2} \pm \sqrt{k^2v^2 - \frac{\gamma^2}{4}}\,.$$

Pro silné tlumení platí $k^2v^2 - \frac{\gamma^2}{4} < 0$ a výsledek lze psát jako

$$\omega = -\mathrm{i}\frac{\gamma}{2} \pm \mathrm{i}\sqrt{\frac{\gamma^2}{4} - k^2v^2}\,.$$

V prvním případě se frekvence stala komplexním číslem, v druhém dokonce imaginárním číslem pro dané reálné k. Jak máme takovou hodnotu interpretovat? Dosaďme hodnotu pro slabé tlumení do oscilující části rovinné vlny

$$\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t} = \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\left(-\mathrm{i}\frac{\gamma}{2} \pm \sqrt{k^2v^2 - \frac{\gamma^2}{4}}\right)t} = \mathrm{e}^{-\frac{\gamma}{2}t}\mathrm{e}^{\mp\mathrm{i}\sqrt{k^2v^2 - \frac{\gamma^2}{4}}}\,.$$

Vidíme, že reálná čás frekvence stále odpovídá oscilacím, ale imaginární část představuje exponenciální pokles amplitudy výchylky s ubíhajícím časem, přičemž konstanta poklesu je $\frac{\gamma}{2}$. Jinak řečeno, čím silnější tlumení, tím rychleji se amplituda oscilací v daném bodě sníží na nulu.

Obdobně bychom mohli řešit členy s první derivací v poloze. Dostali bychom opět komplexní kvadratickou rovnici, ale tentokrát pro vlnové číslo, které by se stalo komplexním. Ještě jedna poznámka zbývá – pokud je tlumení silné, frekvence/vlnové číslo jsou čistě imaginární. To znamená, že systém neosciluje, ale má pouze profil exponenciálního poklesu v čase nebo v prostoru.

Linearizace

Vlnění je přítomno v mnoha spojitých fyzikálních systémech. Důvod k tomu je podobný, jako důvod pro přítomnost harmonických oscilací v diskrétních systémech. V blízkosti stabilního stavu lze totiž systém často aproximovat jako vlnící se systém.

Postup této tzv. linearizace systému je následovný. Nejprve vybereme veličiny, u kterých očekáváme vlnění. Dále tyto veličiny v dynamické rovnici aproximujeme jako malé oscilace okolo rovnovážného stavu. Například, obecnou veličinu $u(x,t)$ bychom mohli approximovat jako $u(x,t) \approx u_0 + u_1(x,t)$, kde u_0 je hodnota v základním stavu a $u_1(x,t)$ je malá výchylka z tohoto stavu ve všech bodech v jakémkoli čase. Konkrétní definice toho, co znamená, že je výchylka malá, už záleží na systému. U horizontálně napnuté struny by to například znamenalo, že výchylka je kdykoli mnohem menší než délka struny. Tuto aproximaci dosadíme do naší dynamické rovnice a ponecháme pouze členy do prvního řádu v u_1. Výsledkem bude rovnice, která je lineární, a velmi často se bude jednat právě o vlnovou rovnici v u_1. Uvedený postup může působit velmi abstraktně, ilustrujeme si ho proto na příkladu vln inspirovaných Bose-Einsteinovým kondenzátem.

Bose-Einsteinův kondenzát je zvláštní stav hmoty, kterého mohou dosáhnout pouze soubory bosonů (určitý typ částic) při velmi nízkých teplotách. Nyní nás nebude zajímat konkrétní povaha tohoto stavu, pouze to, že mu lze připsat vlnovou funkci $\psi(x,t)$, která splňuje tzv. Gross-Pitajevskiho rovnici

$$-\alpha\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2} + \beta\left|\psi\right|^2\psi = \mathrm{i}\hbar\frac{\partial\psi}{\partial t}\,,$$

kde α a β jsou kladné reálné konstanty, $\hbar$ je reálná konstanta (tzv. redukovaná Planckova konstanta) a ψ je obecně komplexní. Nebudeme se zde pokoušet o plně kvantové řešení a provedeme tedy několik (poměrně drastických) aproximací. Předpokládejme, že existuje stacionární řešení ψ_0, které je funkcí pouze x a které je reálné. Potom platí

$$\alpha\frac{\partial^2\psi_0}{\partial x^2} = \beta\left|\psi_0\right|^2\psi_0\,.$$

Nyní aproximujme vlnovou funkci jako

$$\psi(x,t) = \psi_0(x) + \psi_1(x,t)\ ,$$

kde $\psi_1(x,t) \ll \psi_0$. Pak máme

$$-\alpha\frac{\partial^2\psi_0}{\partial x^2} - \alpha\frac{\partial^2\psi_1}{\partial x^2} + \beta\left(\psi_0+\psi_1\right)\left(\psi_0+\psi_1^*\right)\left(\psi_0+\psi_1\right) = \mathrm{i}\hbar\frac{\partial\psi_1}{\partial t}\,,$$

kde jsme použili $|\psi|^2 = \psi^*\psi$. Do prvního řádu v ψ_1 platí

$$-\alpha\frac{\partial^2\psi_0}{\partial x^2} + \beta\,|\psi_0|^2\,\psi_0 - \alpha\frac{\partial^2\psi_1}{\partial x^2} + \beta\left(\psi_0^2\psi_1^* + 2\psi_1\psi_0^2\right) = \mathrm{i}\hbar\frac{\partial\psi_1}{\partial t}\,.$$

První dva členy se odečtou, jelikož se jedná o definici stacionárního řešení. Pro zbylé členy provedeme fourierovskou substituci, což vede na

$$\alpha k^2\psi_1 + \beta\psi_0^2\psi_1^* + 2\beta\psi_0^2\psi_1 = \hbar\omega\psi_1\,.$$

Rovnice komplexně sdružená k této rovnici je

$$\alpha k^2\psi_1^* + \beta\psi_0^2\psi_1 + 2\beta\psi_0^2\psi_1^* = \hbar\omega\psi_1^*\,.$$

Sečtením těchto dvou rovnic dostáváme

$$\alpha k^2\,(\psi_1 + \psi_1^*) + 3\beta\psi_0^2\,(\psi_1 + \psi_1^*) = \hbar\omega\,(\psi_1 + \psi_1^*)\,.$$

Vydělením $\psi_1 + \psi_1^* = 2\,\mathrm{Re}\,\psi_1$ vyjde

$$\alpha k^2 + 3\beta\psi_0^2 = \hbar\omega\,.$$

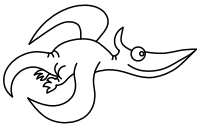
Tento vztah je odlišný od reálného vztahu pro vlny v Bose-Einsteinově kondenzátu, ale blíží se ke správnému vztahu v limitě $\alpha k^2 \gg 3\beta\psi_0^2$. V této limitě je disperzní zákon kvadratický,

$$\omega = \frac{\alpha}{\hbar}k^2\,,$$

což je například velmi odlišné od vztahu pro vlny na struně, kdy jsme měli $\omega = v\,|k|$. Obdobným způsobem lze určit disperzní vztahy pro velké množství systémů, pro které známe dynamické rovnice.

A co dál?

Některé z těchto základních poznatků o vlnách si budete moci procvičit na úlohách seriálu. Čím se tedy budeme zabývat dále? Bude nás čekat obdoba normálních modů pro vlny – budeme řešit ideu polarizace a polarizačních vektorů. Také se pokusíme podívat na trochu modernější příklady vlnění. Ale to až v příštím dílu.



Pořadí řešitelů po IV. sérii

Kompletní výsledky najdete na `http://fykos.cz`.

Kategorie prvních ročníků

	jméno *Student Pilný*	**škola** MFF UK	**1** 6	**2** 6	**3** 5	**4** 8	**5** 8	**P** 10	**E** 13	**S** 10	**IV** **66**	„%“% *100*	% *18*	Σ **264**
1.	*Lukáš Linhart*	G P. Bezruče, Frýdek-Místek	–	–	–	–	–	–	–	–	–	*79*	*10*	**148**
2.	*Vojtěch Kadeřábek*	G Mensa, Praha	–	–	–	–	–	–	–	–	–	*68*	*7*	**105**
3.	*Vladiméra Jiříčková*	G J. Vrchlického, Klatovy	–	–	–	–	–	–	–	–	–	*60*	*5*	**82**
4.	*Daniel Čtvrtečka*	G Christiana Dopplera, Praha	–	–	–	–	–	–	–	–	–	*70*	*3*	**52**
5.	*David Mendl*	G P. de Coubertina, Tábor	–	–	–	–	–	–	–	–	–	*59*	*3*	**47**
6.	*Veronika Bartáková*	Slovanské G, Olomouc	–	–	–	–	–	–	–	–	–	*70*	*3*	**45**
7.	*Anežka Čechová*	G Brno, tř. Kpt. Jaroše	–	–	–	–	–	–	–	–	–	*57*	*2*	**39**
8.	*Richard Materna*	G Brno, tř. Kpt. Jaroše	–	–	–	–	–	–	–	–	–	*53*	*2*	**32**
9.	*Sandeep Kandi*	IMSA, Aurora, USA	–	–	–	–	–	–	–	–	–	*41*	*1*	**27**
10.	*Lukáš Jarábek*	G Grösslingová, Bratislava	–	–	–	–	–	–	–	–	–	*39*	*1*	**23**
11.	*Vítězslav Lamoš*	G, Omská, Praha	–	–	–	–	–	–	–	–	–	*57*	*1*	**21**
12.	*Boris Pasterňak*	Leaf Academy	–	–	–	–	–	–	–	–	–	*86*	*1*	**19**
13.	*Kristián Matúš*	G, Nový Jičín	–	–	–	–	–	–	–	–	–	*48*	*1*	**15**
14.	*Samuel Ševčík*	G, Jeseník	–	–	–	–	–	–	–	–	–	*59*	*0*	**13**
15.–16.	*Jakub Ebringer*	G, Blansko	–	–	–	–	–	–	–	–	–	*56*	*0*	**10**
15.–16.	*Vojtěch Janáček*	G F. X. Šaldy, Liberec	–	–	–	–	–	–	–	–	–	*37*	*0*	**10**
17.	*Johana Vaníčková*	G, Českolipská, Praha	–	–	–	–	–	–	–	–	–	*57*	*0*	**8**
18.	*Krishna Kumar Sah*	Awasiya Public School	–	–	–	–	–	–	–	–	–	*47*	*0*	**7**
19.	*Isuru Liyanawaduge*	D.S.Senanayake College	–	–	–	–	–	–	–	–	–	*100*	*0*	**6**
20.	*Patrik Pecina*	G F. Palackého, Val. Mez.	–	–	–	–	–	–	–	–	–	*31*	*0*	**5**
21.	*Václav Vinkler*	Wichterlovo G, Ostrava	–	–	–	–	–	–	–	–	–	*17*	*0*	**3**

Kategorie druhých ročníků

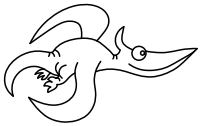
	jméno *Student Pilný*	škola MFF UK	1 6	2 6	3 5	4 8	5 8	P 10	E 13	S 10	IV **66**	„%“% *100*	% *18*	Σ **264**
1.	*David Bálek*	G Legionářů, Příbram	–	–	–	–	–	–	–	–	–	*85*	*8*	**120**
2.	*Pavel Provazník*	G Dašická, Pardubice	–	–	–	–	–	–	–	–	–	*65*	*8*	**115**
3.	*Jonáš Dej*	Wichterlovo G, Ostrava	–	–	–	–	–	–	–	–	–	*75*	*8*	**114**
4.–5.	*Barbora Čemanová*	G, Park mládeže, Košice	–	–	–	–	–	–	–	–	–	*74*	*6*	**99**
4.–5.	*Jan Lepič*	G, Strakonice	–	–	–	–	–	–	–	–	–	*56*	*6*	**99**
6.	*Jakub Hadač*	G V. Hlavatého, Louny	–	–	–	–	–	–	–	–	–	*70*	*6*	**94**
7.	*Martin Kysela*	G, Český Krumlov	–	–	–	–	–	–	–	–	–	*63*	*6*	**93**
8.	*Alexander Stoyanov*	91 Germ. Lang. Sch. ”Pr. K. G”	–	–	–	–	–	–	–	–	–	*42*	*5*	**84**
9.	*Vojtěch Juza*	G, Litomyšl	–	–	–	–	–	–	–	–	–	*57*	*5*	**74**
10.	*Lukáš Létal*	G J. Škody, Přerov	–	–	–	–	–	–	–	–	–	*58*	*4*	**67**
11.	*Miruna Neacsu*	Inter. Computer HS, Bucharest,RO	–	–	–	–	–	–	–	–	–	*51*	*4*	**65**
12.	*Tomáš Patsch*	Slovanské G, Olomouc	–	–	–	–	–	–	–	–	–	*84*	*4*	**59**
13.	*Daniela karpíšková*	Masarykovo G, Plzeň	–	–	–	–	–	–	–	–	–	*49*	*3*	**56**
14.	*Evan Kim*	Tesla STEM High School, USA	–	–	–	–	–	–	–	–	–	*82*	*3*	**54**
15.–16.	*Vít Brázda*	G Dašická, Pardubice	–	–	–	–	–	–	–	–	–	*80*	*3*	**53**
15.–16.	*Ladislav Vávra*	G, Rožnov pod Radhoštěm	–	–	–	–	–	–	–	–	–	*32*	*3*	**53**
17.	*Jan Engler*	G, Hodonín	–	–	–	–	–	–	–	–	–	*77*	*3*	**51**
18.	*Petr Piňos*	Biskupské G, Brno	–	–	–	–	–	–	–	–	–	*74*	*3*	**48**
19.	*Vojtěch Kysilka*	G, Roudnice nad Labem	–	–	–	–	–	–	–	–	–	*51*	*3*	**43**
20.	*Karolina Šedová*	G Jana Keplera, Praha	–	–	–	–	–	–	–	–	–	*91*	*2*	**41**
21.	*Juraj Pavolko*	G, P. Horova, Michalovce	–	–	–	–	–	–	–	–	–	*54*	*2*	**40**
22.	*Martin Švanda*	Arcibiskupské G, Praha	–	–	–	–	–	–	–	–	–	*73*	*2*	**37**
23.	*Ioana Milea*	CN Mihai Eminescu, Romania	–	–	–	–	–	–	–	–	–	*61*	*2*	**35**
24.	*Jiří Jirásek*	G Mikulášské n. 23, Plzeň	–	–	–	–	–	–	–	–	–	*52*	*2*	**32**
25.	*Ivy Qin*	RC Palmer Sec. Sc.	–	–	–	–	–	–	–	–	–	*42*	*2*	**28**
26.–27.	*Julie Křimská*	G Jana Keplera, Praha	–	–	–	–	–	–	–	–	–	*65*	*1*	**26**
26.–27.	*Dalibor Očenášek*	G Uničov	–	–	–	–	–	–	–	–	–	*52*	*1*	**26**
28.	*Jakub Genčur*	G Matyáše Lercha, Brno	–	–	–	–	–	–	–	–	–	*96*	*1*	**22**
29.	*Jiří Mládek*	G, Soběslav	–	–	–	–	–	–	–	–	–	*32*	*1*	**18**
30.	*Ashmit Dutta*	Wayzata High School	–	–	–	–	–	–	–	–	–	*80*	*1*	**16**
31.	*Jan Cícha*	Gymnázium Brno-Bystrc	–	–	–	–	–	–	–	–	–	*42*	*1*	**15**
32.	*Pragun Pudukoli*	Sishu Griha HS, India	–	–	–	–	–	–	–	–	–	*58*	*1*	**14**
33.	*Dominik Blaha*	G, Uherské Hradiště	–	–	–	–	–	–	–	–	–	*50*	*0*	**12**
34.	*Petr Vitko*	G Teplice	–	–	–	–	–	–	–	–	–	*37*	*0*	**10**
35.	*Barbora Peřinová*	Česká zemědělská akademie Humpol	–	–	–	–	–	–	–	–	–	*31*	*0*	**9**
36.	*Jakub Koňárek*	G Brno, tř. Kpt. Jaroše	–	–	–	–	–	–	–	–	–	*73*	*0*	**8**
37.	*Vojtěch Štěpán*	G, Benešov	–	–	–	–	–	–	–	–	–	*100*	*0*	**6**
38.	*Damián Tancoš*	G, Kukučínova, Poprad	–	–	–	–	–	–	–	–	–	*14*	*0*	**5**
39.	*Patrik Jendele*	SPŠ stavební Plzeň	–	–	–	–	–	–	–	–	–	*36*	*0*	**4**
40.	*Timotej Marhefka*	G sv. Jána Pavla II., Poprad	–	–	–	–	–	–	–	–	–	*5*	*0*	**2**

Kategorie třetích ročníků

	jméno *Student Pilný*	škola MFF UK	1 3	2 3	3 5	4 8	5 8	P 10	E 13	S 10	IV **60**	„%“% *100*	% *16*	Σ **240**
1.	*Aleš Opl*	G a Hudební škola, Praha 3	–	–	–	–	–	–	–	–	–	*91*	*11*	**164**
2.	*Jiří Kohl*	Biskupské G, Brno	–	–	–	–	–	–	–	–	–	*94*	*9*	**130**
3.	*Josef Vácha*	G Jana Keplera, Praha	–	–	–	–	–	–	–	–	–	*79*	*8*	**114**
4.	*Yahya Numan INCIRKUS*	Yasar Acar High School	–	–	–	–	–	–	–	–	–	*65*	*7*	**110**
5.	*David Chudožilov*	Reálné G a ZŠ, Prostějov	–	–	–	–	–	–	–	–	–	*70*	*7*	**101**
6.	*Jan Pijáček*	Biskupské G, Brno	–	–	–	–	–	–	–	–	–	*55*	*6*	**95**
7.–8.	*Hynek Jakeš*	Slovanské G, Olomouc	–	–	–	–	–	–	–	–	–	*81*	*5*	**83**
7.–8.	*Nikita Ustinov*	G Jana Keplera, Praha	–	–	–	–	–	–	–	–	–	*73*	*5*	**83**
9.	*Marie Lausová*	G, Jihlava	–	–	–	–	–	–	–	–	–	*50*	*5*	**75**
10.	*Elena Chochoľaková*	G L. Svobodu, Humenné	–	–	–	–	–	–	–	–	–	*75*	*4*	**70**
11.	*Ondřej Piroutek*	G, Českolipská, Praha	–	–	–	–	–	–	–	–	–	*47*	*4*	**69**
12.	*Adam Kozubek*	G a ZUŠ, Šlapanice	–	–	–	–	–	–	–	–	–	*70*	*4*	**62**
13.	*Daniel Skýpala*	G, Olomouc-Hejčín	–	–	–	–	–	–	–	–	–	*74*	*4*	**58**
14.	*Martin Fedorko*	G J. A. Raymana, Prešov	–	–	–	–	–	–	–	–	–	*72*	*3*	**56**
15.–16.	*Jan Bajer*	G, Jihlava	–	–	–	–	–	–	–	–	–	*30*	*3*	**54**
15.–16.	*Pavlína Zavřelová*	Biskupské G, Brno	–	–	–	–	–	–	–	–	–	*64*	*3*	**54**
17.–18.	*Jakub Mikeš*	G J. Škody, Přerov	–	–	–	–	–	–	–	–	–	*73*	*3*	**52**
17.–18.	*Aleš Manuel Papáček*	G, Třeboň	–	–	–	–	–	–	–	–	–	*69*	*3*	**52**
19.	*Jan Marjanko*	G J. Jungmanna, Litoměřice	–	–	–	–	–	–	–	–	–	*52*	*3*	**50**
20.	*Vojtěch Stránský*	G Brno, tř. Kpt. Jaroše	–	–	–	–	–	–	–	–	–	*63*	*3*	**49**
21.	*Antonín Kubík*	G, Roudnice nad Labem	–	–	–	–	–	–	–	–	–	*49*	*3*	**45**
22.	*Jakub Pelc*	G, Benešov	–	–	–	–	–	–	–	–	–	*39*	*3*	**44**
23.	*Adam Húšťava*	European School Luxembourg II	–	–	–	–	–	–	–	–	–	*66*	*2*	**41**
24.	*Lukáš Fidler*	Jiráskovo G, Náchod	–	–	–	–	–	–	–	–	–	*69*	*2*	**40**
25.	*Adam Krška*	G, Mikulov	–	–	–	–	–	–	–	–	–	*75*	*2*	**39**
26.	*Václav Maštera*	G P. de Coubertina, Tábor	–	–	–	–	–	–	–	–	–	*76*	*2*	**37**
27.	*Aleksandar Rusev*	First Language school, Bulgaria	–	–	–	–	–	–	–	–	–	*72*	*2*	**34**
28.–29.	*Matej Korž*	G J. A. Raymana, Prešov	–	–	–	–	–	–	–	–	–	*72*	*2*	**33**
28.–29.	*Aneta Piklová*	G, Strakonice	–	–	–	–	–	–	–	–	–	*43*	*2*	**33**
30.–31.	*Wiktor Macura*	G J. Słowackiego, Český Těšín	–	–	–	–	–	–	–	–	–	*65*	*2*	**31**
30.–31.	*Jáchym Mraček*	Akademické G, Praha	–	–	–	–	–	–	–	–	–	*52*	*2*	**31**
32.–33.	*Eliška Durstová*	G, Dvůr Králové n. L.	–	–	–	–	–	–	–	–	–	*55*	*2*	**28**
32.–33.	*Matěj Charousek*	G Na Vítězné pláni, Praha	–	–	–	–	–	–	–	–	–	*44*	*2*	**28**
34.–35.	*Dávid Brodňanský*	G J. A. Raymana, Prešov	–	–	–	–	–	–	–	–	–	*79*	*1*	**26**
34.–35.	*Matouš Hofmeister*	G J. Barranda, Beroun	–	–	–	–	–	–	–	–	–	*62*	*1*	**26**
36.–37.	*Tomáš Heger*	Jiráskovo G, Náchod	–	–	–	–	–	–	–	–	–	*58*	*1*	**25**
36.–37.	*Anička Chu Ngoc*	G, Jihlava	–	–	–	–	–	–	–	–	–	*49*	*1*	**25**
38.–39.	*Lubomír Břoušek*	G, Jihlava	–	–	–	–	–	–	–	–	–	*60*	*1*	**24**
38.–39.	*Eliška Malá*	Slovanské G, Olomouc	–	–	–	–	–	–	–	–	–	*42*	*1*	**24**
40.–41.	*Ľuboš Bariak*	G Tajovského, B. Bystrica	–	–	–	–	–	–	–	–	–	*43*	*1*	**23**
40.–41.	*Monika Janderová*	G J. V. Jirsíka, Č. Budějovice	–	–	–	–	–	–	–	–	–	*49*	*1*	**23**
42.	*Jevhenij Vorochta*	Jiráskovo G, Náchod	–	–	–	–	–	–	–	–	–	*43*	*1*	**21**
43.	*Vojtěch Votruba*	G Jana Keplera, Praha	–	–	–	–	–	–	–	–	–	*83*	*1*	**20**
44.–45.	*Eva Feldbabelová*	Katolické gymnázium Třebíč	–	–	–	–	–	–	–	–	–	*66*	*1*	**19**
44.–45.	*Matúš Jakuboc*	G, P. Horova, Michalovce	–	–	–	–	–	–	–	–	–	*79*	*1*	**19**
46.	*Martin Polák*	G Masaryk.nám.	–	–	–	–	–	–	–	–	–	*34*	*1*	**18**
47.	*Tereza Skořepová*	G Dašická, Pardubice	–	–	–	–	–	–	–	–	–	*18*	*1*	**15**
48.	*Bishoy Roushdy*	STEM High School, Egypt	–	–	–	–	–	–	–	–	–	*25*	*1*	**14**
49.	*Ondrej Korbel*	G Varšavská, Žilina	–	–	–	–	–	–	–	–	–	*81*	*0*	**13**
50.	*Michaela Šídová*	G, Litoměřická, Praha	–	–	–	–	–	–	–	–	–	*57*	*0*	**12**
51.	*Eliška Věnečková*	G J. Vrchlického, Klatovy	–	–	–	–	–	–	–	–	–	*41*	*0*	**11**
52.	*Michal Štěpán*	Jiráskovo G, Náchod	–	–	–	–	–	–	–	–	–	*63*	*0*	**10**
53.–54.	*Štěpán Kozák*	Jiráskovo G, Náchod	–	–	–	–	–	–	–	–	–	*50*	*0*	**8**
53.–54.	*Vojtěch Smola*	G Komenského, Havířov	–	–	–	–	–	–	–	–	–	*73*	*0*	**8**

Kategorie čtvrtých ročníků

	jméno *Student Pilný*	**škola** MFF UK	**1** 3	**2** 3	**3** 5	**4** 8	**5** 8	**P** 10	**E** 13	**S** 10	**IV** **60**	„%“% *100*	% *16*	Σ **240**
1.	*Patrik Kašpárek*	Katolické gymnázium Třebíč	–	–	–	–	–	–	–	–	–	*86*	*10*	**155**
2.	*Vojtěch Kuchař*	Wichterlovo G, Ostrava	–	–	–	–	–	–	–	–	–	*78*	*9*	**140**
3.	*Šimon Kurz*	G Luďka Pika, Plzeň	–	–	–	–	–	–	–	–	–	*63*	*7*	**109**
4.	*Marek Milička*	G dr. K. Polesného., Znojmo	–	–	–	–	–	–	–	–	–	*79*	*6*	**99**
5.	*Štěpán Pressl*	G J. Vrchlického, Klatovy	–	–	–	–	–	–	–	–	–	*73*	*6*	**96**
6.–7.	*Matěj Dvořák*	G Jana Keplera, Praha	–	–	–	–	–	–	–	–	–	*64*	*6*	**89**
6.–7.	*Viktor Fukala*	G Jana Keplera, Praha	–	–	–	–	–	–	–	–	–	*95*	*6*	**89**
8.	*Tomáš Volf*	G Jura Hronca, Bratislava	–	–	–	–	–	–	–	–	–	*59*	*5*	**77**
9.	*Dominik Farhan*	G Mikulášské n. 23, Plzeň	–	–	–	–	–	–	–	–	–	*66*	*5*	**76**
10.	*Daniel Fousek*	G, Špitálská, Praha	–	–	–	–	–	–	–	–	–	*54*	*4*	**66**
11.	*Lubor Čech*	G Brno, tř. Kpt. Jaroše	–	–	–	–	–	–	–	–	–	*66*	*4*	**59**
12.	*Tomáš Tuleja*	G L. Svobodu, Humenné	–	–	–	–	–	–	–	–	–	*75*	*4*	**57**
13.–14.	*Soňa Husáková*	G, Českolipská, Praha	–	–	–	–	–	–	–	–	–	*73*	*3*	**51**
13.–14.	*Matúš Kolenka*	G Konštantínova, Prešov	–	–	–	–	–	–	–	–	–	*39*	*3*	**51**
15.	*Marek Broul*	G dr. V. Šmejkala, Ústí n. L.	–	–	–	–	–	–	–	–	–	*66*	*2*	**35**
16.	*Viduranga Landers*	D.S.Senanayake College	–	–	–	–	–	–	–	–	–	*58*	*2*	**30**
17.–18.	*Lívia Čerešňová*	ŠpMNDaG, Bratislava	–	–	–	–	–	–	–	–	–	*53*	*2*	**29**
17.–18.	*Aneta Pjatkanová*	G, Kralupy	–	–	–	–	–	–	–	–	–	*57*	*2*	**29**
19.–20.	*Mona Alizadeh*	St Paul's GS	–	–	–	–	–	–	–	–	–	*70*	*1*	**26**
19.–20.	*Marika Kosohorská*	G J. Vrchlického, Klatovy	–	–	–	–	–	–	–	–	–	*90*	*1*	**26**
21.	*Andrew Pun*	M. Garneau Collegiate Institute	–	–	–	–	–	–	–	–	–	*85*	*1*	**23**
22.	*Martin Opat*	G Ľudovíta Štúra, Trenčín	–	–	–	–	–	–	–	–	–	*72*	*1*	**21**
23.–24.	*Log Franc*	Cumberland Valley HS, USA	–	–	–	–	–	–	–	–	–	*69*	*1*	**20**
23.–24.	*Agra Navaratne Navaratne*	D.S.Senanayake College	–	–	–	–	–	–	–	–	–	*48*	*1*	**20**
25.–26.	*Aahana Aahana*	CHIREC International School	–	–	–	–	–	–	–	–	–	*40*	*1*	**19**
25.–26.	*Ondřej Sladký*	G Mikulášské n. 23, Plzeň	–	–	–	–	–	–	–	–	–	*70*	*1*	**19**
27.–28.	*Jaroslav Grulich*	Jiráskovo G, Náchod	–	–	–	–	–	–	–	–	–	*81*	*1*	**17**
27.–28.	*Konstantin Tripunovski*	American HS Skopje, Macedonia	–	–	–	–	–	–	–	–	–	*36*	*1*	**17**
29.–30.	*Zsolt Beke*	G H. Selyeho Komárno	–	–	–	–	–	–	–	–	–	*56*	*1*	**15**
29.–30.	*Riley Lofgren*	Lambert High School, USA	–	–	–	–	–	–	–	–	–	*100*	*1*	**15**
31.	*Makar Kuznietsov*	Lviv Lyceum	–	–	–	–	–	–	–	–	–	*67*	*0*	**12**
32.–34.	*Robert Gemrot*	G Komenského, Havířov	–	–	–	–	–	–	–	–	–	*91*	*0*	**10**
32.–34.	*Gauri Shankar H*	Pondicherry University	–	–	–	–	–	–	–	–	–	*48*	*0*	**10**
32.–34.	*Patrik Kočan*	G M. Hattalu, Trstená	–	–	–	–	–	–	–	–	–	*28*	*0*	**10**
35.–36.	*Gauri Shankar H*	Pondicherry University	–	–	–	–	–	–	–	–	–	*21*	*0*	**9**
35.–36.	*Martin Polyácsko*	G Alejová, Košice	–	–	–	–	–	–	–	–	–	*75*	*0*	**9**
37.	*Jakub Kliment*	G Tajovského, B. Bystrica	–	–	–	–	–	–	–	–	–	*73*	*0*	**8**
38.	*Dávid Benko*	G L. Svobodu, Humenné	–	–	–	–	–	–	–	–	–	*44*	*0*	**7**
39.–40.	*Martina Daňková*	Gymnázium Brno-Bystrc	–	–	–	–	–	–	–	–	–	*83*	*0*	**5**
39.–40.	*Jan Klivan*	G, Dačice	–	–	–	–	–	–	–	–	–	*45*	*0*	**5**
41.	*Kian Kyars*	Harry Ainlay Highschool	–	–	–	–	–	–	–	–	–	*67*	*0*	**4**
42.–44.	*Youssef Abdelmoneim*	STEM High School, Egypt	–	–	–	–	–	–	–	–	–	*50*	*0*	**3**
42.–44.	*Philopater Gabra*	STEM High School, Egypt	–	–	–	–	–	–	–	–	–	*5*	*0*	**3**
42.–44.	*Le Vu Neumann*	G Opatov, Praha	–	–	–	–	–	–	–	–	–	*100*	*0*	**3**
45.	*Anna Kaiserová*	SPŠS a OA Kadaň	–	–	–	–	–	–	–	–	–	*40*	*0*	**2**
46.–49.	*Hussein Hassan*	STEM High School, Egypt	–	–	–	–	–	–	–	–	–	*0*	*0*	**0**
46.–49.	*Islam Hassan*	STEM High School, Egypt	–	–	–	–	–	–	–	–	–	*0*	*0*	**0**
46.–49.	*Andrew Henin*	STEM High School, Egypt	–	–	–	–	–	–	–	–	–	*0*	*0*	**0**
46.–49.	*Ahmed Jaheen*	STEM High School, Egypt	–	–	–	–	–	–	–	–	–	*0*	*0*	**0**



FYKOS
UK, Matematicko-fyzikální fakulta
Ústav teoretické fyziky
V Holešovičkách 2
180 00 Praha 8

www: `https://fykos.cz`
e-mail: `fykos@fykos.cz`

@FYKOS ***@fykosak***

Fyzikální korespondenční seminář je organizován studenty MFF UK. Je zastřešen Oddělením propagace a mediální komunikace MFF UK a podporován Ústavem teoretické fyziky MFF UK, jeho zaměstnanci a Jednotou českých matematiků a fyziků. Realizace projektu byla podpořena Ministerstvem školství, mládeže a tělovýchovy.

Toto dílo je šířeno pod licencí Creative Commons Attribution-Share Alike 3.0 Unported.
Pro zobrazení kopie této licence navštivte `https://creativecommons.org/licenses/by-sa/3.0/`.