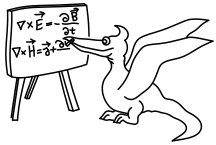

Seriál: Polarizace

V minulém díle seriálu jsme se zabývali vlněním, které se odehrávalo pouze v jednom rozměru – struna mohla oscilovat jenom vertikálně, částice reprezentovala pouze jedna vlnová funkce atp. Nyní se zkusíme zamyslet nad tím, co se stane, když se vlnění objeví ve více rozměrech, které jsou navzájem provázány. Například můžeme přemýšlet nad oscilacemi struny v obou směrech kolmých na směr napnutí struny, nebo nad tím, jaké vlny mohou existovat v nabité tekutině, kde se kromě hustoty a teploty může měnit i nábojová hustota. Jako konkrétní příklad si ukážeme pomalé vlnění v plazmě, které splňuje rovnice takzvané magnetohydrodynamiky. Začněme ale pomaleji, se strunou, která může kmitat ve dvou směrech.

Švihadlo

Uvažujme švihadlo napnuté mezi dvěma body, přičemž napětí ve švihadle je T. Jeho délková hustota je ρ. Zvolme soustavu souřadnic tak, aby bylo napnuté podél osy x, a aby bylo jedním koncem uchyceno v počátku soustavy souřadnic. Nechť je u výchylka švihadla z rovnovážné polohy ve vertikálním směru (podél osy z) a v je výchylka v horizontálním směru (podél osy y, tj. kolmo na směr napětí). Mohli bychom zopakovat stejné odvození jako v minulém díle, avšak musíme brát v potaz dva rozměry, ve kterých se švihadlo může pohybovat. To lze nejlépe učinit pomocí vektorového formalizmu.

Víme, že vertikální sílu působící na element délky $\mathrm{d}x$ v jednom rozměru šlo určit jako $\mathrm{d}F = T\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\,\mathrm{d}x$. Lze předpokládat, že oscilace v dalším směru budou nezávislé (nijak nezávisí na oscilacích v původním směru), takže pro sílu v druhém směru bude platit $\mathrm{d}F' = T\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}\,\mathrm{d}x$. Pro celkovou sílu můžeme psát

$$\mathrm{d}\mathbf{F} = T\frac{\partial^2 \mathbf{u}}{\partial x^2}\,\mathrm{d}x\,,$$

kde $\mathbf{u} = (u, v)^\mathsf{T}$ a $\mathrm{d}\mathbf{F} = (\mathrm{d}F, \mathrm{d}F')^\mathsf{T}$. Druhý Newtonův zákon pak lze zapsat jako

$$\mathrm{d}\mathbf{F} = \mathrm{d}m\frac{\partial^2 \mathbf{u}}{\partial t^2} = \rho\,\mathrm{d}x\frac{\partial^2 \mathbf{u}}{\partial x^2}$$

a tedy

$$\frac{\partial^2 \mathbf{u}}{\partial t^2} = \frac{T}{\rho}\frac{\partial^2 \mathbf{u}}{\partial x^2}\,.$$

Toto je naše dvourozměrná analogie vlnové rovnice. Důležité je, že zachováváme fakt, že výchylky v obou směrech jsou stále funkce pouze dvou proměnných (času a příslušné souřadnici) čili můžeme provést fourierovskou substituci jak jsme zvyklí. To vede k vektorové rovnici

$$-\omega^2\hat{\mathbf{u}} = \frac{T}{\rho}\left(-k^2\right)\hat{\mathbf{u}}\,,$$

kde $\hat{\mathbf{u}}$ je komplexní vektorová výchylka, pro kterou platí $\mathbf{u} = \mathrm{Re}\,\hat{\mathbf{u}}$, přičemž reálnou část bereme z každé komponenty zvlášť. Toto je vlastně soustava algebraických rovnic, kterou lze zapsat v maticové podobě jako

$$\begin{pmatrix} \frac{T}{\rho}k^2 - \omega^2 & 0 \\ 0 & \frac{T}{\rho}k^2 - \omega^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \hat{u} \\ \hat{v} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} ,$$

kde $\hat{u}$ a $\hat{v}$ jsou komplexní výchylky v jednotlivých směrech. Ve fourierovské substituci jsme předpokládali tvary řešení

$$\hat{u} = u_0 \mathrm{e}^{\mathrm{i}kx - \mathrm{i}\omega t} ,$$
$$\hat{v} = v_0 \mathrm{e}^{\mathrm{i}kx - \mathrm{i}\omega t} ,$$

kde u_0 a v_0 jsou potenciálně komplexní konstanty. Jelikož exponenciální část je pro oba směry shodná, můžeme maticovou rovnici upravit na

$$\begin{pmatrix} \frac{T}{\rho}k^2 - \omega^2 & 0 \\ 0 & \frac{T}{\rho}k^2 - \omega^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_0 \\ v_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} .$$

Zde použijeme již známý formalizmus z normálních modů – takovéto rovnice mají netriviální řešení pouze pokud determinant této matice je nula

$$0 = \begin{vmatrix} \frac{T}{\rho}k^2 - \omega^2 & 0 \\ 0 & \frac{T}{\rho}k^2 - \omega^2 \end{vmatrix} = \left(\frac{T}{\rho}k^2 - \omega^2 \right)^2 \quad \Rightarrow \quad \omega = \pm \sqrt{\frac{T}{\rho}} k .$$

Dostáváme stejný disperzní vztah jako v jednorozměrném případě. Matice se nyní stává nulovou maticí, takže u_0 i v_0 jsou zcela neomezeny, tj. vlnění můžeme zapsat jako libovolnou lineární kombinaci

$$\hat{\mathbf{u}}(x,t) = u_0 \mathrm{e}^{\pm \mathrm{i}kx - \mathrm{i}\omega t} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + v_0 \mathrm{e}^{\pm \mathrm{i}kx - \mathrm{i}\omega t} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} ,$$

kde směry propagace obou vln mohou být nezávislé. Těmto odlišným vlnám se říká polarizace daného vlnění a vektor $(u_0, v_0)^{\mathsf{T}}$ nazýváme polarizační vektor. Jak přesně určíme konstanty u_0 a v_0? Uvažujme nyní konkrétní případ – nechť se švihadlo pohybuje jako při klasickém přeskakování, tj. obíhá okolo rovnovážné polohy tak, že jednotlivé elementy se pohybují konstantní úhlovou rychlostí po kružnicích, jejichž poloměr se zvyšuje směrem ke středu švihadla, kde dosahuje maxima. V čase $t = 0$ lze amplitudu švihadla zapsat jako

$$\mathbf{u}(x,0) = \begin{pmatrix} A \sin\left(\frac{\pi x}{L}\right) \\ 0 \end{pmatrix} ,$$

kde A je reálná konstanta. Důležitá je také rychlost švihadla v čase $t = 0$, kterou můžeme zapsat jako

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} = \begin{pmatrix} 0 \\ A\omega \sin\left(\frac{\pi x}{L}\right) \end{pmatrix} .$$

Jak tento pohyb zachytit pomocí polarizací? U stojatého vlnění už jsme zvyklí, že pohyb lze zpravidla popsat jako superpozici dvou vln propagujících se v opačných směrech. Navrhněme tedy

$$\hat{\mathbf{u}}(x,t) = \begin{pmatrix} u_0 \\ v_0 \end{pmatrix} \mathrm{e}^{\mathrm{i}kx - \mathrm{i}\omega t} + \begin{pmatrix} u_1 \\ v_1 \end{pmatrix} \mathrm{e}^{-\mathrm{i}kx - \mathrm{i}\omega t} .$$

V čase $t = 0$ potom platí

$$\hat{\mathbf{u}}(x,0) = \begin{pmatrix} u_0 \mathrm{e}^{\mathrm{i}kx} + u_1 \mathrm{e}^{-\mathrm{i}kx} \\ v_0 \mathrm{e}^{\mathrm{i}kx} + v_1 \mathrm{e}^{-\mathrm{i}kx} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (u_0 + u_1)\cos(kx) + \mathrm{i}\,(u_0 - u_1)\sin(kx) \\ (v_0 + v_1)\cos(kx) + \mathrm{i}\,(v_0 - v_1)\sin(kx) \end{pmatrix} .$$

Reálnou část určíme jako

$$\mathbf{u}(x,0) = \begin{pmatrix} (\operatorname{Re} u_0 + \operatorname{Re} u_1)\cos(kx) + (\operatorname{Re}(\mathrm{i}u_0) - \operatorname{Re}(\mathrm{i}u_1))\sin(kx) \\ (\operatorname{Re} v_0 + \operatorname{Re} v_1)\cos(kx) + (\operatorname{Re}(\mathrm{i}v_0) - \operatorname{Re}(\mathrm{i}v_1))\sin(kx) \end{pmatrix} .$$

Abychom splnili počáteční podmínky, potřebujeme $k = \frac{\pi}{L}$ a dále

$$\begin{aligned} \operatorname{Re} u_0 + \operatorname{Re} u_1 &= 0\,, \\ \operatorname{Re}(\mathrm{i}u_0) - \operatorname{Re}(\mathrm{i}u_1) &= A\,, \\ \operatorname{Re} v_0 + \operatorname{Re} v_1 &= 0\,, \\ \operatorname{Re}(\mathrm{i}v_0) - \operatorname{Re}(\mathrm{i}v_1) &= 0\,. \end{aligned}$$

Jelikož pro obecné komplexní číslo platí

$$\operatorname{Re}(\mathrm{i}z) = -\operatorname{Im} z\,,$$

můžeme psát

$$\begin{aligned} \operatorname{Re} u_0 &= -\operatorname{Re} u_1\,, \\ \operatorname{Re} v_0 &= -\operatorname{Re} v_1\,, \\ \operatorname{Im} v_0 &= \operatorname{Im} v_1\,, \\ \operatorname{Im} u_0 &= \operatorname{Im} u_1 - A\,. \end{aligned}$$

Toto jsou první čtyři rovnice pro celkem osm neznámých (reálné a imaginární části $u_{0,1}$ a $v_{0,1}$). Další čtyři rovnice lze odvodit ze vztahu pro počáteční rychlost. Máme

$$\frac{\partial \hat{\mathbf{u}}}{\partial t} = (-\mathrm{i}\omega)\,\hat{\mathbf{u}}$$

a tedy

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} = \omega \begin{pmatrix} (\operatorname{Re}(-\mathrm{i}u_0) + \operatorname{Re}(-\mathrm{i}u_1))\cos(kx) + (\operatorname{Re} u_0 - \operatorname{Re} u_1)\sin(kx) \\ (\operatorname{Re}(-\mathrm{i}v_0) + \operatorname{Re}(-\mathrm{i}v_1))\cos(kx) + (\operatorname{Re} v_0 - \operatorname{Re} v_1)\sin(kx) \end{pmatrix} .$$

Tím jsme získali čtyři rovnice

$$\begin{aligned} \operatorname{Im} u_0 &= -\operatorname{Im} u_1\,, \\ \operatorname{Re} u_0 &= \operatorname{Re} u_1\,, \\ \operatorname{Im} v_0 &= -\operatorname{Im} v_1\,, \\ \operatorname{Re} v_0 &= \operatorname{Re} v_1 + A\,. \end{aligned}$$

Dosazením z předchozích vztahů dostáváme

$$\begin{aligned} \operatorname{Im} u_1 - A &= -\operatorname{Im} u_1\,, \\ -\operatorname{Re} u_1 &= \operatorname{Re} u_1\,, \\ \operatorname{Im} v_1 &= -\operatorname{Im} v_1\,, \\ -\operatorname{Re} v_1 &= \operatorname{Re} v_1 + A\,. \end{aligned}$$

Výsledkem je

$$
\begin{aligned}
u_0 &= -\mathrm{i}\frac{A}{2}\,, \quad v_0 = \frac{A}{2}\,,\\
u_1 &= \mathrm{i}\frac{A}{2}\,, \quad v_1 = -\frac{A}{2}\,.
\end{aligned}
$$

Celkový časový vývoj lze popsat rovnicí

$$
\hat{\mathbf{u}}(x,t) = \begin{pmatrix} -\mathrm{i}\frac{A}{2}\mathrm{e}^{\mathrm{i}kx} + \mathrm{i}\frac{A}{2}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}kx} \\ \frac{A}{2}\mathrm{e}^{\mathrm{i}kx} - \frac{A}{2}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}kx} \end{pmatrix} \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t} = A \begin{pmatrix} \sin\left(\frac{\pi}{L}x\right) \\ \mathrm{i}\sin\left(\frac{\pi}{L}x\right) \end{pmatrix} \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t}\,,
$$

tudíž v reálné výchylce

$$
\mathbf{u}(x,t) = A\sin\left(\frac{\pi}{L}x\right)\begin{pmatrix}\cos(\omega t)\\ \sin(\omega t)\end{pmatrix}\,.
$$

Vlny v plazmatu

Rozměr, ve kterém vlny oscilují, ovšem nemusí být pouze prostorová dimenze, může se jednat o jiný stupeň volnosti. Tuto skutečnost budeme reprezentovat na modelu plazmatu. Předpokládejme, že plazma se skládá z nabitých částic, elektronů a jader. Budeme uvažovat pomalé pohyby, tj. budeme předpokládat, že jakákoliv dynamika elektronů ustala a vedla k vybalancování elektrického pole. Dále budeme zkoumat pouze plazma, kde se veškeré hodnoty mění v prostoru pouze v závislosti na souřadnici x kartézského souřadnicového systému (představujme si tenký sloupec plazmatu).

Při řešení vyjdeme z rovnic magnetohydrodynamiky. Jedná se o soustavu dvou skalárních a dvou vektorových diferenciálních rovnic. Postupně je nyní představíme.

První je tzv. rovnice kontinuity, která zajišťuje, že se hmota plazmatu nikam neztrácí. Její tvar je

$$
\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}\left(\rho v_x\right) = 0\,,
$$

kde ρ je hustota plazmatu a $\mathbf{v} = (v_x, v_y, v_z)^\mathsf{T}$ je jeho rychlost. Další skalární rovnicí je stavová rovnice plazmatu. Tu je obecně složité určit přesně, takže zde použijeme pouze obecnou fenomenologickou stavovou rovnici, která má tvar

$$
\left(\frac{\partial}{\partial t} + v_x\frac{\partial}{\partial x}\right)\left(\frac{P}{\rho^\gamma}\right) = 0\,,
$$

kde P je tlak v plazmatu a γ je konstanta. Třeba pro ideální plyn by se γ pojila s Poissonovou konstantou. Tato rovnice vlastně zajišťuje adiabatičnost stlačování plazmatu.

Můžeme přejít k vektorovým rovnicím. První z nich je tzv. Navier-Stokesova rovnice, která reprezentuje druhý Newtonův zákon v tekutinách

$$
\rho\left(\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + v_x\frac{\partial}{\partial x}\mathbf{v}\right) = \begin{pmatrix} -\frac{\partial P}{\partial x} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} - \frac{1}{\mu_0}\mathbf{B}\times\begin{pmatrix} 0 \\ -\frac{\partial B_z}{\partial x} \\ \frac{\partial B_y}{\partial x} \end{pmatrix}\,,
$$

kde $\mathbf{B} = (B_x, B_y, B_z)^\mathsf{T}$ je magnetické pole v plazmatu a $\times$ značí vektorový součin. Této rovnici je o něco složitější porozumět, ale vnímejme ji tak, že na pravé straně jsou síly na jednotku objemu tekutiny, jednak kvůli nerovnosti tlaku a zadruhé kvůli magnetickému poli, zatímco na levé straně je popsána změna hybnosti tekutiny v daném bodě.

Poslední vektorová rovnice je tzv. indukční rovnice, která plyne z Maxwellových rovnic v našem modelu a má tvar

$$\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = \begin{pmatrix} 0 \\ -\frac{\partial (\mathbf{v}\times\mathbf{B})_z}{\partial x} \\ \frac{\partial (\mathbf{v}\times\mathbf{B})_y}{\partial x} \end{pmatrix} .$$

Přímé řešení těchto rovnic je zřejmě extrémně těžký úkol – jedná se o soustavu nelineárních diferenciálních rovnic. Ukazuje se, že jedno relativně triviální řešení se sestává z klidového stavu $\rho = \rho_0$, $P = P_0$, $\mathbf{v} = 0$ a $\mathbf{B} = \mathbf{B}_0$, kde veličiny označené indexem 0 jsou konstantní jak v čase, tak v prostoru. Kolem tohoto klidového stavu lze rovnice linearizovat, čímž získáme vlnové rovnice.

Bez újmy na obecnosti můžeme předpokládat, že magnetické pole $\mathbf{B}_0$ leží v rovinně xz, tedy $B_{0y} = 0$. Dále předpokládejme, že obecné proměnné lze zapsat jako $\rho = \rho_0 + \rho_1(x,t)$, kde $|\rho_1| \ll |\rho_0|$ pro všechny časy a pozice (obdobně pro ostatní veličiny). Dosazením těchto výrazů můžeme rovnice linearizovat, pokud zachováme členy pouze do prvního řádu „malých“ veličin. Nezapomeňme přitom, že $\mathbf{v}_0 = \mathbf{0}$.

První rovnice je linearizovaná jako

$$\frac{\partial \rho_1}{\partial t} + \rho_0 \frac{\partial v_{1x}}{\partial x} = 0 .$$

Druhá vyžaduje složitější úpravu

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + v_{1x}\frac{\partial}{\partial x}\right)\left(\frac{P_0 + P_1}{(\rho_0+\rho_1)^\gamma}\right) = 0 .$$

Platí

$$(\rho_0+\rho_1)^{-\gamma} = \rho_0^{-\gamma}\left(1 + \frac{\rho_1}{\rho_0}\right)^{-\gamma} \approx \rho_0^{-\gamma}\left(1 - \frac{\gamma\rho_1}{\rho_0}\right) .$$

Pokud zachováváme pouze členy do prvního řádu, dostáváme

$$\rho_0^{-\gamma}\left(\frac{\partial}{\partial t} + v_x\frac{\partial}{\partial x}\right)\left(P_0 - P_0\frac{\gamma\rho_1}{\rho_0} + P_1\right) = 0 .$$

Jelikož P_0 je konstantní a ostatní členy v druhé závorce jsou již prvního řádu „malosti“, pouze časová derivace zůstane v našem přiblížení do prvního řádu a platí (pro nenulovou hustotu ρ_0)

$$\frac{\partial P_1}{\partial t} - \frac{\gamma P_0}{\rho_0}\frac{\partial \rho_1}{\partial t} = 0 .$$

Navier-Stokesovu rovnici rozepíšeme v jednotlivých komponentech vektorů. Dále zavedeme úhel α, který určuje odchylku pole $\mathbf{B}_0$ od směru osy x. Platí $B_{0x} = B_0 \cos\alpha$, $B_{0z} = B_0 \sin\alpha$, kde $B_0 = |\mathbf{B}_0|$. Potom můžeme psát (zde již bez odvození, žádné zvláštní triky tu nejsou)

$$\begin{aligned}
\rho_0 \frac{\partial v_{1x}}{\partial t} &= -\frac{\partial P_1}{\partial x} - \frac{1}{\mu_0} B_0 \sin\alpha \frac{\partial B_{1z}}{\partial x}\,, \\
\rho_0 \frac{\partial v_{1z}}{\partial t} &= \frac{1}{\mu_0} B_0 \cos\alpha \frac{\partial B_{1z}}{\partial x}\,, \\
\rho_0 \frac{\partial v_{1y}}{\partial t} &= \frac{1}{\mu_0} B_0 \cos\alpha \frac{\partial B_{1y}}{\partial x}\,.
\end{aligned}$$

Následující tři vztahy odvodíme obdobným způsobem z indukční rovnice

$$\begin{aligned}
\frac{\partial B_{1x}}{\partial t} &= 0\,, \\
\frac{\partial B_{1z}}{\partial t} &= B_0 \cos\alpha \frac{\partial v_{1z}}{\partial x} - B_0 \sin\alpha \frac{\partial v_{1x}}{\partial x}\,, \\
\frac{\partial B_{1y}}{\partial t} &= B_0 \cos\alpha \frac{\partial v_{1y}}{\partial x}\,.
\end{aligned}$$

Celkem tedy máme osm rovnic pro osm neznámých – 3 komponenty $\mathbf{B}_1$, 3 komponenty $\mathbf{v}_1$, ρ_1 a P_1.

Ve vektorových rovnicích jsme záměrně psali komponentu y jako poslední. Důvodem je, že jsou oddělené od ostatních – neznámé v_{1y} a B_{1y} se vyskytují pouze v nich. To znamená, že vlnění popsané těmito dvěma rovnicemi je nezávislé na vlnění, které je popsáno zbytkem rovnic.

Dále postupujeme již standardně – provedeme fourierovskou substituci pro všechny veličiny typu $\rho_1(x,t) \to \hat{\rho}_1 = A\mathrm{e}^{\mathrm{i}kx - \mathrm{i}\omega t}$, kde A je komplexní konstanta a $\hat{\rho}_1$ je komplexní výchylka (v tomto případě hustoty). Všech osm rovnic pak lze zapsat jako dvě maticové rovnice (jedna pro proměnné v_{1y} a B_{1y}, druhá pro ostatní proměnné)

$$\begin{pmatrix} -\mathrm{i}\omega\rho_0 & -\mathrm{i}k\frac{1}{\mu_0}B_0\cos\alpha \\ \mathrm{i}kB_0\cos\alpha & \mathrm{i}\omega \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \hat{v}_{1y} \\ \hat{B}_{1y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}\,,$$

$$\begin{pmatrix} -\mathrm{i}\omega\rho_0 & 0 & \frac{\mathrm{i}k}{\mu_0}B_0\sin\alpha & 0 & \mathrm{i}k \\ 0 & -\mathrm{i}\omega\rho_0 & -\frac{\mathrm{i}k}{\mu_0}B_0\cos\alpha & 0 & 0 \\ \mathrm{i}kB_0\sin\alpha & -\mathrm{i}kB_0\cos\alpha & -\mathrm{i}\omega & 0 & 0 \\ \mathrm{i}k\rho_0 & 0 & 0 & -\mathrm{i}\omega & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \mathrm{i}\omega\frac{\gamma P_0}{\rho_0} & -\mathrm{i}\omega \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \hat{v}_{1x} \\ \hat{v}_{1z} \\ \hat{B}_{1z} \\ \hat{\rho}_1 \\ \hat{P}_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}\,,$$

kde jsme vypustili triviální rovnici $-\mathrm{i}\omega\hat{B}_{1x} = 0$, ze které plyne právě $\hat{B}_{1x} = 0$. Tím máme dva potenciální typy vlnění. Abychom určili disperzní vzorec, je potřeba spočítat determinant matice odpovídající danému vlnění. Zde se budeme věnovat pouze vlnění v v_{1y} a B_{1y}. Tyto vlny nazýváme Alfvénovy vlny.

Determinant matice 2×2 určíme snadno

$$\begin{vmatrix} \mathrm{i}kB_0\cos\alpha & \mathrm{i}\omega \\ -\mathrm{i}\omega\rho_0 & -\mathrm{i}k\frac{1}{\mu_0}B_0\cos\alpha \end{vmatrix} = k^2\frac{1}{\mu_0}B_0^2\cos^2\alpha - \omega^2\rho_0\,.$$

Z podmínky, že determinant musí být roven nule, vychází disperzní vztah

$$\omega = \frac{B_0 \cos\alpha}{\sqrt{\mu_0 \rho_0}} k\,.$$

To znamená, že vlny mají lineární disperzi (stejnou jako světlo nebo zvuk) s fázovou rychlostí

$$v_\mathrm{p} = \frac{B_0 \cos\alpha}{\sqrt{\mu_0 \rho_0}}\,.$$

Platí tedy, že čím více je pole $\mathbf{B}_0$ odklopené od směru x, tím pomaleji se vlny propagují. Pro určení polarizačních vektorů dosadíme tento výsledek zpět do maticové rovnice

$$\begin{pmatrix} \mathrm{i}kB_0\cos\alpha & \mathrm{i}\frac{kB_0\cos\alpha}{\sqrt{\mu_0\rho_0}} \\ -\mathrm{i}\frac{kB_0\cos\alpha}{\sqrt{\mu_0}}\sqrt{\rho_0} & -\mathrm{i}\frac{kB_0\cos\alpha}{\mu_0} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \hat{v}_{1y} \\ \hat{B}_{1y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}\,.$$

Z čehož plyne, že možné řešení je

$$\begin{pmatrix} \hat{v}_{1y} \\ \hat{B}_{1y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \nu \\ -\frac{\nu}{\sqrt{\mu_0\rho_0}} \end{pmatrix}\,,$$

kde ν je komplexní konstanta s rozměrem rychlosti. Oscilace v B_{1y} probíhají v přímé antifázi k oscilacím v_{1y} a jsou větší pro nižší hustotu plazmatu ρ_0.

Závěrem

V tomto seriálu jsme postupně objevovali systémy, které všemožně kmitají, vlní se a oscilují v blízkém okolí lokálního minima energie. Svět vln ovšem není omezen pouze na malé oscilace, existují i typy vlnění, které splňují některé charakteristiky (například zachovávají tvar při pohybu), ale od jednoduchých vln se odlišují. Například rovnice, která je popisuje, může být nelineární, takže vlny musí mít konkrétní amplitudu. Nelineární rovnice jsou ovšem výrazně složitější na řešení, zejména kvůli tomu, že nemůžeme uplatnit princip superpozice. Takové systémy se v současnosti stále zkoumají. Nicméně lineární vlnění a oscilace se stále hodně často objevují v mnoha systémech a my věříme, že zkušenosti nabyté v tomto seriálu se Vám budou velmi hodit ve Vaší fyzikální kariéře.

Fyzikální korespondenční seminář je organizován studenty MFF UK. Je zastřešen Oddělením propagace a mediální komunikace MFF UK a podporován Ústavem teoretické fyziky MFF UK, jeho zaměstnanci a Jednotou českých matematiků a fyziků.