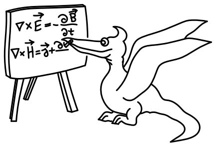


Seriál: Symetrie a Lineární Algebra

V minulém díle jsme rozšířili náš matematický aparát, což nám umožnilo nahlédnout a popsat některé složitější systémy. Viděli jsme, že pokud osciluje více částic, nebo se částice pohybuje ve více rozměrech, objevuje se více typů možných oscilací. Pro každý rozměr, případně každou další částici, existuje příslušný počet rovnic, které nám umožní najít řešení. Obecně tento počet rozměrů problému nazýváme počet stupňů volnosti problému. Viděli jsme také, jak u oscilací můžeme určit relativní fázový rozdíl a poměr amplitud.

Nyní tyto poznatky převedeme do ještě silnější formy – místo toho, abychom řešili jednotlivé rovnice oscilací, budeme řešit všechny rovnice zároveň, s využitím formalismu lineární algebry. Tento formalismus si tedy musíme nejprve představit.

Lineární algebra

Úkolem lineární algebry je obecně popis chování lineárních transformací vektorů. Rozeberme tedy jednotlivé pojmy v této větě.

Vektory jsou kolekce čísel, pro které definujeme některé základní operace. Většinou značíme vektory pomocí šipky či tlustého fontu, zde budeme používat $\mathbf{v}$. Komponenty vektoru značíme pomocí znaku pro vektor spolu s dolním indexem označujícím daný komponent, tedy první komponent vektoru $\mathbf{u}$ by byl označen jako u_1. Někdy je vhodné použít pro index komponentu znak používaný k označení určité osy souřadnic, tedy v kartézské soustavě souřadnic můžeme mluvit o x-komponentu vektoru $\mathbf{t}$, který značíme jako t_x. V našem případě budou vektory sdružovat polohy jednotlivých částic ve všech možných rozměrech pohybu, tj. pokud budeme zkoumat systém tří částic, z nichž dvě se pohybují v rovině a jedna v celém prostoru, bude mít náš vektor 7 komponentů.

Pro vektory definujeme vektorový součet, který lze v jednotlivých komponentech zapsat jako

$$\mathbf{t} = \mathbf{u} + \mathbf{v} \iff \forall n : t_n = u_n + v_n \,,$$

kde n vybíráme z možných indexů $\mathbf{u}$, které jsou shodné s možnými indexy $\mathbf{v}$ a $\mathbf{t}$. Dále definujeme násobení skalárem

$$\mathbf{v} = a\mathbf{u} \iff \forall n : v_n = au_n \,.$$

Vektorové odčítání je pak interpretovatelné jako kombinace násobení skaláremm a sčítání

$$\mathbf{u} - \mathbf{v} = \mathbf{u} + (-1)\,\mathbf{v} \,.$$

Poslední důležitou operací, kterou pro vektory zde definujeme, je skalární součin. Pomocí něho převedeme dva vektory na jeden skalár. Pro vektory $\mathbf{u}$ a $\mathbf{v}$ je definován jako

$$s = \mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = \sum_n u_n v_n \,,$$

kde opět n jde přes všechny indexy $\mathbf{u}$ a $\mathbf{v}$. Pokud je skalární součin dvou vektorů roven 0, pak říkáme, že vektory jsou navzájem *kolmé*.

Můžeme si všimnout, že provádění vektorových součtů bude v našem případě odpovídat superpozici dvou pohybů. Vidíme tedy, že zavedení vektorů přímo replikuje vlastnosti, které očekáváme od řešení lineárních diferenciálních rovnic, o nichž víme, že představují náš oscilující systém.

Báze vektoru

Pokud si představíme vektor jako pozici v kartézských souřadnicích, je zřejmé, že ho můžeme rozložit na součet jiných vektorů, přičemž tyto vektory mohou být navzájem kolmé. Takovémuto rozkladu vektoru se říká bázový rozklad. V našem algebraickém pojetí vektorů bychom mohli například napsat

$$\mathbf{u} = \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \end{pmatrix} = 3 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + 5 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = 3\mathbf{e}_1 + 5\mathbf{e}_2 \,,$$

kde jsme definovali bázové vektory $\mathbf{e}_1$ a $\mathbf{e}_2$. Kolmost bázových vektorů můžeme ověřit skalárním součinem, jelikož platí

$$\mathbf{e}_1 \perp \mathbf{e}_2 \iff \mathbf{e}_1 \cdot \mathbf{e}_2 = 0 \,.$$

Výběr báze ovšem není jedinečný - například, mohli bychom zvolit bázi

$$\mathbf{e}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \,, \quad \mathbf{e}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \,,$$

která stále obsahuje dva navzájem kolmé vektory a platí

$$\mathbf{u} = \mathbf{e}_1 + 4\mathbf{e}_2 \,.$$

Obecně je vhodné používat pro báze vektory, které mají jednotkovou délku, tj. které splňují

$$\forall n : \mathbf{e}_n \cdot \mathbf{e}_n = 1 \,,$$

což třeba předchozí příklad nesplňuje.

Algebraicky lze rozklad do tzv. ortonormální báze (tj. báze skládající se z navzájem kolmých jednotkových vektorů) realizovat pomocí skalárních součinů, které udávají složku jednoho vektoru ve směru druhého vektoru. Při takovém výběru báze lze psát

$$\mathbf{u} = (\mathbf{u} \cdot \mathbf{e}_1)\,\mathbf{e}_1 + (\mathbf{u} \cdot \mathbf{e}_2)\,\mathbf{e}_2 \,.$$

Všimněme si, že takový rozklad do báze můžeme provést pro libovolné množství bázových vektorů. Nemusíme se tedy omezovat maximálně na 3 dimenze, jak jsme možná zvyklí z geometrické interpretace vektorů.

Lineární transformace vektorů

Operace jako násobení skalárem či skalární součin jsou lineární operace, ale zdaleka nevyčerpávají všechny možnosti, kterými lze vektor lineárně změnit. Například, co kdybychom chtěli vytvořit vektor $\mathbf{v}$ tak, že $v_1 = u_2 + u_1$ a $v_2 = 0$, kde $\mathbf{u}$ je jiný vektor? Definujme obecnou lineární transformaci T vektoru $\mathbf{u}$ jako nový vektor $\mathbf{v} = T(\mathbf{u})$, pro který platí

$$T(a\mathbf{u} + b\mathbf{v}) = aT(\mathbf{u}) + bT(\mathbf{v}) \,.$$

Uvažujme nyní nad tím, jak bychom mohli takovou transformaci rozložit na co nejmenší díly. Víme, že vektory můžeme rozdělit na jednotkové vektory přenásobené komponenty vektoru – tomuto říkáme bázový rozklad vektoru. Například,

$$\mathbf{u} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + 2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = u_1 \mathbf{e}_1 + u_2 \mathbf{e}_2 \,.$$

Poté pro lineární transformaci T platí

$$\mathbf{v} = T(\mathbf{u}) = T(\mathbf{e}_1)\, u_1 + T(\mathbf{e}_2)\, u_2 \,.$$

Jak bychom našli komponenty nového vektoru $\mathbf{v}$? Musíme získat komponenty podél bázových vektorů, tedy

$$\begin{aligned} v_1 &= \mathbf{e}_1' \cdot \mathbf{v} = \mathbf{e}_1' \cdot T(\mathbf{e}_1)\, u_1 + \mathbf{e}_1' \cdot T(\mathbf{e}_2)\, u_2 \,, \\ v_2 &= \mathbf{e}_2' \cdot \mathbf{v} = \mathbf{e}_2' \cdot T(\mathbf{e}_1)\, u_1 + \mathbf{e}_2' \cdot T(\mathbf{e}_2)\, u_2 \,, \end{aligned}$$

přičemž bázové vektory $\mathbf{e}$ a $\mathbf{e}'$ mohou, ale nemusí být ze stejné báze. Vidíme tedy, že k určení transformovaného vektoru nám stačí znát komponenty originálního vektoru (u_1 a u_2) a série koeficientů, které můžeme označit jako

$$m_{11} = \mathbf{e}_1' \cdot T(\mathbf{e}_1) \;,\; m_{12} = \mathbf{e}_1{}' \cdot T(\mathbf{e}_2) \;,\; m_{21} = \mathbf{e}_2' \cdot T(\mathbf{e}_1) \;,\; m_{22} = \mathbf{e}_2' \cdot T(\mathbf{e}_2) \;.$$

Tyto koeficienty jsou *nezávislé* na konrétním vektoru $\mathbf{u}$. Jsou pouze odrazem vlastností transformace T a zvolené báze (popřípadě zvolených bází). Tyto koeficienty můžeme uskupit do objektu, kterému říkáme matice.

Maticová algebra

Pokud porovnáme naše výrazy pro komponenty matice m_{ij} a rozklad vektoru do báze, zjišťujeme, že matici lze vlastně také vnímat jako vektor skládající se z dalších vektorů. Transformaci vektoru $\mathbf{u}$ pak můžeme vnímat jako aplikaci skalárního součinu mezi vektory obsaženými v matici a vektorem $\mathbf{u}$. Tento poznatek, mimo jiné, vedl k definici maticového součinu, který je základní operací maticové algebry. Abychom maticovému součinu porozuměli, představme si nejprve matici jako kolekci vektorů

$$M = \begin{pmatrix} \mathbf{m}_1 \\ \mathbf{m}_2 \end{pmatrix} \,.$$

Tato matice může působit na vektor $\mathbf{u}$, čímž získáme transformovaný vektor $\mathbf{v}$

$$\mathbf{v} = M\mathbf{u} = \begin{pmatrix} \mathbf{m}_1 \\ \mathbf{m}_2 \end{pmatrix} \mathbf{u} = \begin{pmatrix} \mathbf{m}_1 \cdot \mathbf{u} \\ \mathbf{m}_2 \cdot \mathbf{u} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} m_{11} u_1 + m_{12} u_2 \\ m_{21} u_1 + m_{22} u_2 \end{pmatrix} \,.$$

Obyčejně ovšem píšeme matici jako souhrn jednotlivých komponentů. V takovém případě je potřeba psát vektory horizontálně – význam tohoto zápisu zanedlouho poznáme. Pak tedy matice M je

$$M = \begin{pmatrix} m_{11} & m_{12} \\ m_{21} & m_{22} \end{pmatrix} \,.$$

Maticový součin pak lze definovat bez reference k vektorům tvořící matici. Komponent i vektoru $\mathbf{v} = M\mathbf{u}$ totiž můžeme zapsat jako

$$v_i = (M\mathbf{u})_i = \sum_j M_{ij} u_j \,,$$

kde indexy j jdou přes všechny indexy vektoru $\mathbf{u}$. Zde můžeme poprvé vidět první důležitou podmínku maticového součinu – rozměr vektoru $\mathbf{u}$ musí být stejný jako počet sloupců matice M.

Tato definice maticového součinu je velmi lehce zobecnitelná ze součinu matice a vektoru na součin dvou matic $A = MB$ jako

$$A_{ij} = \sum_k M_{ik} B_{kj} \,.$$

Příklad maticového součinu je pak

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 5 & -1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & -2 \\ 3 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & -7 \\ 20 & 4 \end{pmatrix} \,.$$

Další důležitou operací s maticemi je tzv. transpozice, při které efektivně prohodíme řádky a sloupce matice. Transponovanou matici M značíme jako M^T. Uvádíme jednoduchý příklad

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 5 & -1 & 3 \end{pmatrix}^\mathsf{T} = \begin{pmatrix} 1 & 5 \\ 3 & -1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \,.$$

V komponentech matice toto můžeme zapsat jako

$$(M_{ij})^\mathsf{T} = (M_{ji}) \,.$$

Speciálně pro vektory platí

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \end{pmatrix}^\mathsf{T} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \,.$$

Správně bychom tedy původní rovnici pro násobení vektoru $\mathbf{u}$ maticí M měli psát jako

$$M\mathbf{u} = \begin{pmatrix} \mathbf{m}_1^\mathsf{T} \\ \mathbf{m}_2^\mathsf{T} \end{pmatrix} \mathbf{u} \,.$$

Můžeme si všimnout, že skalární součin dvou vektorů lze zapsat jako maticový součin, kde jeden z vektorů je transponovaný, tedy

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = \mathbf{u}^\mathsf{T} \mathbf{v} \,.$$

Dále, matice lze po komponentech sčítat a násobit skaláry, obdobně jako vektory

$$A = B + M \iff \quad A_{ij} = B_{ij} + M_{ij} \,,$$
$$sA \iff (sA)_{ij} = sA_{ij} \,.$$

Toto jsou základy maticové algebry. My je použijeme k řešení rovnic, které složitějším způsobem kombinují různé stupně volnosti. Ke kompletnímu řešení se nám bude hodit ještě jedna část lineární algebry, kterou je koncept vlastních vektorů a vlastních čísel.

Vlastní vektory a vlastní čísla

Pro čtvercové matice platí, že transformují vektory do nových vektorů, které mají stejný počet komponentů. Je tedy možné, že existuje takový vektor, který zůstává transformací nezměněný, až na určitý skalární násobek. Takovému vektoru se říká vlastní vektor dané matice a příslušnému skalárnímu násobku říkáme vlastní číslo matice pro daný vlastní vektor. Tyto veličiny jsou důležitou vlastností matice. Vlastní vektor $\mathbf{v}$ matice M můžeme definovat rovnicí

$$M\mathbf{v} = \lambda\mathbf{v}\,,$$

kde λ je příslušné vlastní číslo. Čtvercová matice o rozměru n může mít až n různých vlastních vektorů, každý s příslušným vlastním číslem. Jak tyto vlastní vektory odvodit? Buď můžeme vlastní vektor uhádnout na základě vlastností systému, jako je symetrie (viz níže), nebo lze vektor spočítat na základě rovnice

$$(M - \lambda I)\,\mathbf{v} = \mathbf{0}\,,$$

kde I je tzv. jednotková matice – čtvercová matice, u které jsou nenulové pouze diagonální prvky, které jsou obsazeny jedničkami. Lze se snadno přesvědčit, že jakýkoliv validní maticový součin vektoru (nebo čtvercové matice) s jednotkovou maticí nezmění původní vektor (nebo matici). Výše zmíněná rovnice má buďto triviální řešení, kdy všechny komponenty $\mathbf{v}$ jsou rovny nule, nebo matice $M - \lambda I$ obsahuje ve svých řádcích vektory, které se smíchají dohromady tak, že vytvoří nulu v každém řádku $\mathbf{v}$. To ale znamená, že tyto vektory v řádcích jsou nutně lineárně závislé, tj. alespoň jeden z nich lze vyjádřit jako lineární kombinaci ostatních. Důležitým výsledkem z teorie lineárních rovnic je, že v tomto případě se veličina, kterou nazýváme determinant matice, rovná nule.

Determinant lze určit pro libovolnou čtvercovou matici, my budeme ovšem zejména potřebovat chování pro 2×2 matice. Pro ty se determinant spočítá následovně

$$M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad |M| = ad - bc\,,$$

kde $|M|$ značí determinant matice M (nikoli nějakou absolutní hodnotu). Dále nás zajímá determinant diagonální matice, který je určen jednoduše součinem všech diagonálních prvků. Pokud se větší matice skládá z více navzájem oddělených bloků ležících na diagonále, lze determinant určit jako součin determinantů jednotlivých bloků. Například

$$M = \begin{pmatrix} a & b & 0 & 0 \\ c & d & 0 & 0 \\ 0 & 0 & e & 0 \\ 0 & 0 & 0 & f \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad |M| = ef\,(ad - bc)\ ,$$

přičemž determinant matice 1×1 je prostě jediný komponent dané matice.

Pojďme si ukázat příklad výpočtu vlastního vektoru a vlastního čísla. Uvažujte matici

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}\,.$$

Abychom našli vlastní čísla, vyřešíme rovnici

$$0 = |M - \lambda I| = \begin{vmatrix} 1-\lambda & 2 \\ 2 & 1-\lambda \end{vmatrix} = (1-\lambda)^2 - 4 \quad \Rightarrow \quad (1-\lambda)^2 = 4\,.$$

Výsledkem je $\lambda = 1 \pm 2$, neboli $\lambda \in \{3, -1\}$. Se znalostí λ již můžeme vyřešit rovnice pro vlastní vektor. Zvolme $\lambda = -1$, potom dostaneme

$$(M - \lambda I)\,\mathbf{v} = 0\,,$$
$$\begin{pmatrix} 1-(-1) & 2 \\ 2 & 1-(-1) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}\,,$$
$$\begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}\,.$$

Řešení je v tomto jednoduchém případě nasnadě – platí $v_1 = -v_2$, a vlastní vektor je například

$$\mathbf{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}\,.$$

Říkáme například, protože vektor můžeme libovolně násobit skaláry, a bude se při transformaci maticí M chovat stejně. Důležitý je tedy poměr jednotlivých komponentů vlastních vektorů, nikoliv jejich absolutní velikost.

Jako poznámka – mohlo by nás zajímat, proč jsme zkrátka neřešili jednotlivé řádky v rovnici $(M - \lambda I)\,\mathbf{v} = 0$? Problémem je, že v dané soustavě n rovnic máme $n+1$ neznámých – n komponentů vektoru $\mathbf{v}$, a vlastní číslo λ. Ukáže se, že kdybychom tyto rovnice řešili, tak v posledním kroku vydělíme hodnotou nenulového komponentu na obou stranách rovnice, čímž budeme moct získat vzájemné poměry všech komponentů a vlastní číslo. Je ale mnohdy snažší snažit se získat determinant matice, jelikož z něho rovnou získáme vlastní číslo, které má samo o sobě určitý význam. Fakt, že stále máme $n + 1$ neznámých na n rovnic se projeví v tom, že vlastní vektory můžeme volně násobit skaláry.

Normální mody

Dosti bylo obskurní matematiky, pojďme se věnovat fyzice. Na následujících dvou příkladech se pokusím ilustrovat užitečnost výše zmíněných nástrojů – budeme schopni přesně popsat kmitání netriviálních oscilátorů. V tomto případě jsem si vybral zaprvé dvě závaží, která jsou navzájem spojená pružinou a kmitají pouze ve vertikálním směru, za druhé pak dvě částice, které jsou spojené jednou pružinou a zároveň je každá zvlášť uchycena ke stěnám, mezi nimiž je mezera.

Dvě závaží od stropu

Uvažujme následující systém: první pružina s tuhostí k je přichycená k pevnému stropu na jednom konci a k závaží o hmotnosti m na druhém konci. Druhá pružina, také o tuhosti k, je připevněná k prvnímu závaží na jednom konci a k druhému závaží o stejné hmotnosti m na druhém konci. Rovnovážná poloha systému (kdy systém neosciluje) nastane ve chvíli, kdy gravitační síly vybalancují napětí v pružinách. Touto rovnovážnou polohou se nyní nebudeme zabývat, na její výpočet stačí použít známé poznatky ze statiky. Uvažujme tedy malé výchylky z této rovnovážné polohy. Výchylku prvního závaží označíme jako x_1, výchylku druhého závaží jako x_2. Předpokládáme, že obě výchylky oscilují, a lze je tedy zapsat jako

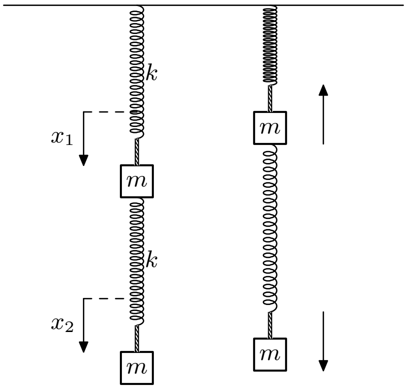
$$x_1(t) = \mathrm{Re}\left(A\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega t}\right)\,,$$
$$x_2(t) = \mathrm{Re}\left(B\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega t}\right)\,.$$

Případný fázový rozdíl mezi oscilacemi můžeme vyjádřit jako součást konstanty B, pro kterou můžeme psát

$$B = |B|\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi}\,,$$

kde φ je fázový rozdíl. Tedy

$$x_2(t) = \mathrm{Re}\left(|B|\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\omega t+\varphi)}\right)\,.$$



Obr. 1: Nalevo je znázorněna geometrie problému a zobrazena definice x_1 a x_2. Napravo je znázorněn jeden okamžik během kmitání jednoho normálního modu. Šipky naznačují směr pohybu.

První pružina je tedy prodloužená oproti rovnovážné poloze o délku x_1, zatímco druhá pružina je prodloužená o $x_2 - x_1$. V druhé pružině je síla

$$F_2 = -k\left(x_2 - x_1\right)\,.$$

V první pružině je síla

$$F_1 = -kx_1 - F_2\,,$$

jelikož síla z druhé pružiny se přenáší na první pružinu. Dle druhého Newtonova zákona v diferenciální formě tedy můžeme psát

$$F_1 = m\frac{\mathrm{d}^2 x_1}{\mathrm{d}t^2} = -kx_1 + k\left(x_2 - x_1\right)\,,$$
$$F_2 = m\frac{\mathrm{d}^2 x_2}{\mathrm{d}t^2} = -k\left(x_2 - x_1\right)\,.$$

Provedením fourierovské substituce dostáváme

$$-m\omega^2 x_1 = -2kx_1 + kx_2\,,$$
$$-m\omega^2 x_2 = kx_1 - kx_2\,.$$

Tuto rovnici lze přepsat do maticové rovnice – snažíme se najít oscilace v x_1 a v x_2, které jsou nezávislé, takže je vlastně lze vnímat jako různé dimenze oscilací. Konkrétně, definujme vektor $\mathbf{x}$ jako

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}\,.$$

Pak platí

$$\omega^2 M\mathbf{x} = K\mathbf{x}\,,$$

kde K je matice

$$K = \begin{pmatrix} 2k & -k \\ -k & k \end{pmatrix}\,,$$

a M je matice

$$M = \begin{pmatrix} m & 0 \\ 0 & m \end{pmatrix}\,,$$

přičemž jsme obě strany obou původních rovnic vynásobili -1. Naše soustava rovnic je tedy vyjádřena jednou maticovou rovnicí

$$\omega^2 \begin{pmatrix} m & 0 \\ 0 & m \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2k & -k \\ -k & k \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}\,.$$

Z toho můžeme odvodit

$$\begin{pmatrix} 2k - m\omega^2 & -k \\ -k & k - m\omega^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}\,,$$

tedy

$$\left(K - \omega^2 M\right)\mathbf{x} = \mathbf{0}\,.$$

Tato rovnice je obdobou té, kterou jsme řešili při hledání vlastních čísel matice. Opět, je potřeba zjistit, kdy je determinant matice roven nule, tedy $\left|K - \omega^2 M\right| = 0$. Determinant této matice je

$$\begin{vmatrix} 2k - m\omega^2 & -k \\ -k & k - m\omega^2 \end{vmatrix} = \left(2k - m\omega^2\right)\left(k - m\omega^2\right) - k^2 = 0\,,$$

takže

$$\begin{aligned} 2k^2 - 2km\omega^2 - km\omega^2 + m^2\omega^4 - k^2 &= 0\,,\\ m^2\omega^4 - 3mk\omega^2 + k^2 &= 0\,. \end{aligned}$$

Vydělením m^2 a zavedením $\omega_0^2 = \frac{k}{m}$ dostáváme

$$\omega^4 - 3\omega_0^2\omega^2 + \omega_0^4 = 0\,.$$

Vyřešíme bikvadratickou rovnici jako kvadratickou rovnici, ale pro ω^2. Jejím řešením je

$$\omega^2 = \frac{3\omega_0^2 \pm \sqrt{9\omega_0^4 - 4\omega_0^4}}{2}\,.$$

Máme tedy dvě možné frekvence oscilací

$$\omega = \omega_0\sqrt{\frac{3}{2} \pm \sqrt{\frac{5}{4}}}\,.$$

Jaký bude poměr amplitud oscilací, popřípadě fázový rozdíl? K tomu musíme najít kromě vlastních čísel také vlastní vektory matice M. První řádek matice v naší maticové rovnici udává

$$m\omega^2 x_1 = 2kx_1 - kx_2 \,.$$

Nyní už známe hodnotu ω^2, kterou můžeme dosadit. Dostáváme tedy

$$m\omega_0^2 \left(\frac{3}{2} \pm \sqrt{\frac{5}{4}}\right) x_1 = 2kx_1 - kx_2 \,,$$

$$\omega_0^2 \left(\frac{3}{2} \pm \sqrt{\frac{5}{4}}\right) x_1 = 2\omega_0^2 x_1 - \omega_0^2 x_2 \,,$$

Můžeme vydělit ω_0^2 a zároveň také vydělit faktorem $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega t}$, který je obsažen jak v x_1, tak v x_2, takže dostaneme

$$\left(\frac{3}{2} \pm \sqrt{\frac{5}{4}}\right) A = 2A - B \,,$$

$$\left(-\frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{5}{4}}\right) A = -B \,,$$

$$\frac{B}{A} = \frac{1}{2} \mp \sqrt{\frac{5}{4}} \,.$$

Poměr oscilací je tedy různý pro různé frekvence. Pro vyšší frekvenci

$$\omega = \sqrt{\frac{3}{2} + \sqrt{\frac{5}{4}}} \sqrt{\frac{k}{m}}$$

osciluje systém tak, že poměr amplitudy druhého závaží ku prvnímu závaží je

$$\frac{B}{A} = \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{5}}{2} \,.$$

Tento poměr je menší než nula, což znamená, že v každý moment oscilace se závaží pohybují opačným směrem. Nižší frekvence oscilací

$$\omega = \sqrt{\frac{3}{2} - \sqrt{\frac{5}{4}}} \sqrt{\frac{k}{m}}$$

odpovídá situaci, kdy poměr amplitud je

$$\frac{B}{A} = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{5}}{2}$$

a závaží oscilují ve stejném směru. V jazyku fázových rozdílů jsme mohli psát

$$-1 = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi}$$

a tedy usoudit, že v prvním případě jsou kmity prvního a druhého závaží v perfektní antifázi – výsledek, ke kterému jsme dospěli i bez této úvahy.

Uvědomme si, co jsme vlastně nyní dokázali. Zjistili jsme, že pro systém **dvou** částic existují **dvě** speciální frekvence, při kterých jsou dynamické rovnice splněny. Tyto frekvence odpovídají dvěma různým typům oscilací, které jsou charakterizované komponenty A a B určitého vektoru. Těmto typům oscilací říkáme normální mody.

Mohli byste namítnout, že sice jsme popsali velmi specifický případ, kdy obě polohy oscilují, ale že zajisté lze vymyslet pohyb závaží, který je výrazně složitější. Klíčem k síle normálních modů je zde linearita našich dynamických rovnic. Zjišťujeme totiž, že pokud najdeme dva vektory, které splňují dynamické rovnice (jako jsme našli my), pak i jakákoliv jejich lineární kombinace splňuje dynamické rovnice. Matematicky řečeno, jestliže máme $\mathbf{A}_1$ takové, že

$$\omega^2 M\mathbf{A}_1 = K\mathbf{A}_1\,,$$

a jiné $\mathbf{A}_2$, které splňuje

$$\omega^2 M\mathbf{A}_2 = K\mathbf{A}_2\,,$$

pak pro libovolné skaláry a a b platí

$$\omega^2 M\left(a\mathbf{A}_1 + b\mathbf{A}_2\right) = K\left(a\mathbf{A}_1 + b\mathbf{A}_2\right)\,,$$

a tedy i vektor $a\mathbf{A}_1 + b\mathbf{A}_2$ je řešením dynamických rovnic. Kromě dvou speciálních případů oscilací jsme tedy odhalili i nekonečné množství pohybů systému, které lze interpretovat jako *superpozici* pohybu dvou normálních modů. Právě kvůli této vlastnosti se lineární systémy popisují tak jednoduše – pro popsání velkého množství možných jevů nám stačí určení pouze několika základních parametrů.

Elementární struna

Uvažujme nyní druhý příklad. Mějme dvě částice o shodné hmotnosti m. První je ukotvená ke zdi, která prochází počátkem souřadnic, pružinou o tuhosti k. Druhá je přichycená pružinou o stejné tuhosti ke zdi rovnoběžné s první zdí a procházející bodem $\mathbf{R}$, přičemž $\mathbf{R}$ je vektor kolmý na roviny zdí. Nakonec jsou částice navzájem spojeny ještě jednou pružinou o tuhosti k. Částice se mohou volně pohybovat v rovině kolmé na tyto dvě zdi.

Řešení tohoto příkladu uvádíme pouze zrychleně, abyste si mohli procvičit výpočet některých konkrétních veličin. Začneme nalezením rovnovážné polohy. Nechť je souřadnice první částice dána vektorem $\mathbf{r}_1$ a poloha druhé částice nechť je dána vektorem $\mathbf{r}_2$. Na první částici působí síla

$$\mathbf{F}_1 = -k\mathbf{r}_1 + k\left(\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1\right)\,.$$

Na druhou částici působí síla

$$\mathbf{F}_2 = -k\left(\mathbf{r}_2 - \mathbf{R}\right) + k\left(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2\right)\,.$$

V rovnováze budou síly nulové, což vede na

$$\mathbf{r}_1 = \frac{1}{3}\mathbf{R}\,,$$
$$\mathbf{r}_2 = \frac{2}{3}\mathbf{R}\,.$$

Označme tyto pozice jako $\mathbf{r}_{1,0}$ a $\mathbf{r}_{2,0}$. Malé výchylky z těchto pozic označíme jako $\mathbf{x}_1$ a $\mathbf{x}_2$, takže platí $\mathbf{r}_1 = \mathbf{r}_{1,0} + \mathbf{x}_1$, obdobně pro druhou částici. Zjistíme, že při těchto malých výchylkách budou výslednice sil rovny

$$\mathbf{F}_1 = -k\mathbf{x}_1 + k\left(\mathbf{x}_2 - \mathbf{x}_1\right)$$

pro první částici a

$$\mathbf{F}_2 = -k\mathbf{x}_2 + k\left(\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2\right)$$

pro druhou částici. Z druhého Newtonova zákona víme

$$\mathbf{F}_1 = m\frac{\mathrm{d}^2\mathbf{r}_1}{\mathrm{d}t^2}\,,$$
$$\mathbf{F}_2 = m\frac{\mathrm{d}^2\mathbf{r}_2}{\mathrm{d}t^2}\,.$$

Jelikož $\mathbf{r}_{1,0}$ a $\mathbf{r}_{2,0}$ jsou konstantní vektory, platí

$$\mathbf{F}_1 = m\frac{\mathrm{d}^2\mathbf{x}_1}{\mathrm{d}t^2}\,,$$
$$\mathbf{F}_2 = m\frac{\mathrm{d}^2\mathbf{x}_2}{\mathrm{d}t^2}\,.$$

Opět budeme předpokládat, že systém osciluje. Z fourierovské substituce odvodíme $\mathbf{F}_1 = -m\omega^2\mathbf{r}_1$, obdobně pro druhou rovnici. V maticové formě můžeme tyto rovnice zapsat jako

$$\begin{pmatrix} m\omega^2 - 2k & 0 & k & 0 \\ 0 & m\omega^2 - 2k & 0 & k \\ k & 0 & m\omega^2 - 2k & 0 \\ 0 & k & 0 & m\omega^2 - 2k \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_{11} \\ x_{12} \\ x_{21} \\ x_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}\,,$$

kde x_{11} je první komponent vektoru $\mathbf{x}_1$ atd. Determinant této matice nemůžeme ihned najít, jelikož se nejedná o diagonální matici. Ale můžeme si všimnout, že se mezi sebou vážou pouze komponenty s indexem 1, resp. 2. Pokud tyto komponenty dáme dohromady v našem vektoru, což determinant matice nezmění, dostaneme následující rovnici

$$\begin{pmatrix} m\omega^2 - 2k & k & 0 & 0 \\ k & m\omega^2 - 2k & 0 & 0 \\ 0 & 0 & m\omega^2 - 2k & k \\ 0 & 0 & k & m\omega^2 - 2k \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_{11} \\ x_{21} \\ x_{12} \\ x_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}\,,$$

Tato matice se již skládá z dvou matic na diagonále, a umíme tedy určit její determinant, tj.

$$D = \begin{vmatrix} m\omega^2 - 2k & k & 0 & 0 \\ k & m\omega^2 - 2k & 0 & 0 \\ 0 & 0 & m\omega^2 - 2k & k \\ 0 & 0 & k & m\omega^2 - 2k \end{vmatrix}$$

$$D = \begin{vmatrix} m\omega^2 - 2k & k \\ k & m\omega^2 - 2k \end{vmatrix}^2 = \left(\left(m\omega^2 - 2k\right)^2 - k^2\right)^2\,.$$

Položíme $D = 0$, a dostáváme

$$\begin{aligned} k^2 &= \left(m\omega^2 - 2k\right)^2 \,, \\ k &= \pm\left(m\omega^2 - 2k\right) \,, \\ (2 \pm 1)\, k &= m\omega^2 \,. \end{aligned}$$

Zavedeme

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}} \,,$$

což vede na

$$\omega = \sqrt{2 \pm 1}\omega_0 \,.$$

Získali jsme tedy pouze dvě frekvence, ačkoliv počet normálních modů bude 4. To znamená, že některé mody mají shodné frekvence. Dosazením do původní rovnice získáme vztah pro vlastní vektory. Začněme s $\omega = \omega_0$. Pak

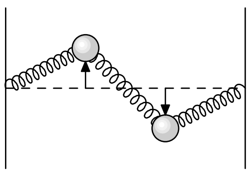
$$\begin{pmatrix} m\frac{k}{m} - 2k & k & 0 & 0 \\ k & m\frac{k}{m} - 2k & 0 & 0 \\ 0 & 0 & m\frac{k}{m} - 2k & k \\ 0 & 0 & k & m\frac{k}{m} - 2k \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_{11} \\ x_{21} \\ x_{12} \\ x_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} .$$

Opět narážíme na fakt, že dva bloky matice jsou nezávislé. Takže první dva komponenty našeho vlastního vektoru vůbec nemíchají zbývající dva komponenty, a naopak. Lze tedy určit dva vlastní vektory z této jedné frekvence (jak jsme očekávali), které mají hodnoty například

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} , \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} .$$

Pro $\omega = \sqrt{3}\omega_0$ lze poté určit, že vlastní vektory budou

$$\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} , \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} .$$



Obr. 2: Naznačený směr pohybu částic při kmitání v jednom normálním modu.

Vliv symetrie

Mnoho problémů oscilací obsahuje určité symetrie. Například, v předchozím problému jsme mohli bez problému prohodit souřadnice používané pro popis první a druhé částice – dostali bychom přesně stejnou sadu dynamických rovnic. Systém byl tedy tzv. symetrický při výměně částic.

Takovouto symetrii můžeme definovat i pomocí matice – efektivně hledáme matici S, pro kterou platí (pro popis druhého příkladu)

$$S\begin{pmatrix}x_{11}\\x_{21}\\x_{12}\\x_{22}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x_{21}\\x_{11}\\x_{22}\\x_{12}\end{pmatrix},$$

což znázorňuje prohození označení částic. Určení takovéto matice je poměrně jednoduché – každý komponent nového vektoru určíme jedním komponentem z originálního vektoru, který musí matice S vybrat. Platí

$$S=\begin{pmatrix}0&1&0&0\\1&0&0&0\\0&0&0&1\\0&0&1&0\end{pmatrix}.$$

Tušíme, že výsledné mody systému budou tuto symetrii nějakým způsobem respektovat. Ukazuje se, že platí velmi obecné pravidlo. Pokud oscilující systém splňuje určitou symetrii, pak vlastní vektory těchto oscilací jsou alespoň zčásti dány vlastními vektory matice, která popisuje tuto symetrii. Důkaz tohoto pravidla je poměrně složitý a nebudeme se jím zde přímo zabývat. Pro ty zvídavější z vás, symetrii systému lze rigorozněji definovat jako invarianci Hamiltoniánu systému při aplikování dané symetrie. Můžete se také zamyslet, jaké má toto tvrzení důsledky v kontextu teorému Noetherové, pokud ho znáte. K řešení problémů v tomto seriálu tento přesah však není potřeba.

Co však potřeba bude, je schopnost určit matice aplikující danou symetrii (zejména permutace částic) a najít pro tyto matice vlastní vektory. Můžeme zkontrolovat, že vlastní vektory nalezené v předchozím příkladě skutečně jsou vlastními vektory matice S, s vlastními čísly ± 1. Mody jsou tedy symetrické nebo antisymetrické při výměně částic.

Výhoda hledání vlastních vektorů v maticích symetrie spočívá v tom, že tyto matice jsou zpravidla jednodušší než dynamická matice, která řídí oscilace. Poté, co najdeme vlastní vektory matice symetrie, můžeme získat vlastní čísla jednoduchým dosazením vlastního vektoru do dynamické rovnice.

Neúplné symetrie

Může se stát, že systém má určitou symetrii, avšak tato symetrie nedeterminuje celé chování systému. Například, uvažujte míček, který se pohybuje údolím, které by vzniklo protažením paraboly ležící v rovnině xy (danou třeba vzorcem $y = x^2$) do směru z – rovnice povrchu by stále byla $y = x^2$, nezávislá na z. Zřejmě platí symetrie zrcadlení přes rovinu yz, tedy symetrie $x \rightarrow -x$. Pokud bychom oscilace charakterizovali třemi souřadnicemi míčku $\mathbf{r} = \begin{pmatrix} x & y & z \end{pmatrix}$, operace symetrie by byla

$$S = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} .$$

Všimněme si, že blok spodních dvou řádků a pravých dvou sloupců matice představují vlastně jednotkovou matici v komponentech y a z. To znamená, že symetrie definovaná maticí S neklade žádné nároky na komponenty y a z, tyto složky mohou být cokoliv (neboli působením S na $\mathbf{r}$ se tyto komponenty nikdy nezmění). To znamená, že tato symetrie by nám mohla pomoci zbavit se maximálně jednoho stupně volnosti. Můžeme ji tedy použít k nalezení pouze jednoho vlastního vektoru. Nicméně, jelikož víme, že vlastní vektory jsou navzájem kolmé, můžeme zkusit uhádnout ostatní vlastní vektory oscilací, a stačí nám už určit menší počet neznámých.

Při dosazování vlastních vektorů symetrie do vlastních vektorů kmitů musíme na neúplné symetrie dávat pozor - pokud daný komponent není symetrií nijak omezen, musíme za něj dosadit obecné číslo. To, že symetrie daný komponent neomezuje, totiž ještě neznamená, že není omezen dynamikou systému a symetrií samotné dynamiky. Například, zákon zachování hybnosti může klást nároky na komponent, který jinak není omezen symetrií kvůli záměně částic.

Nekonečno oscilátorů

Už víme, jak řešit soustavy obsahující určitý počet oscilátorů. Co když ale oscilátorů bude efektivně nekonečno? V takovém případě můžeme někdy přejít k popisu systému pomocí kontinuálních veličin a začínáme popisovat fenomén vlnění. Některými základními vlastnostmi vln, jako jsou disperzní vztahy či superpozice, se budeme zabývat v příštím díle.

Fyzikální korespondenční seminář je organizován studenty MFF UK. Je zastřešen Oddělením propagace a mediální komunikace MFF UK a podporován Ústavem teoretické fyziky MFF UK, jeho zaměstnanci a Jednotou českých matematiků a fyziků.