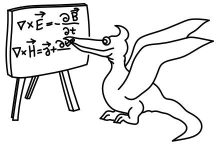


Seriál: Víc oscilátorů víc ví

Na konci minulého dílu bylo naznačeno, že se budeme zabývat více navzájem propojenými oscilátory či oscilacemi ve více dimenzích. Než se ovšem do takových úkolů pustíme, bude třeba poněkud zformalizovat některé matematické kroky, které jsme při odvození chování jednoduchých oscilací učinili. Konkrétně se bude jednat o dvě důležité kapitoly z matematiky – naším prvním cílem budou derivace a diferenciální rovnice a poté se podíváme na některé aspekty komplexních čísel. Doufáme, že většina z témat pro vás bude pouze opakováním, zatímco jiná přinesou nový pohled na věc. Doporučujeme také prozkoumat různé jiné zdroje mimo tento seriál, pokud si vysvětlením nějaké problematiky nebudete jistí. Jelikož se jedná o velmi rozšířené koncepty, zdrojů pro studium existuje bezpočet.

Pod mikroskopem jsou všechny křivky přímky

V minulých dílech jsme se zabývali přiblížením určité funkce v okolí nějakého bodu. Je to právě ukotvení této aproximace v rigoróznějším matematickém formalismu, které vede k pojmu derivace. Proces tohoto ukotvení začněme na jednoduchém konkrétním případu – polynomiální funkci.

Již víme, že pro malá h platí

$$(1+h)^a \approx 1 + ah\,.$$

Při řešení předchozích problémů jsme si také ukazovali, že pro $A \gg B$ lze psát

$$(A+B)^a = A^a \left(1 + \frac{B}{A}\right)^a \approx A^a \left(1 + \frac{aB}{A}\right)\,.$$

Vždy jsme tedy aproximovali funkci x^a v okolí nějakého bodu (v prvním případě v okolí bodu 1, v případě druhém v okolí bodu A) tím, že jsme provedli rozvoj pro určité malé reálné číslo. Samotná hodnota funkce v okolí tohoto bodu závisí na několika parametrech – jednak na funkční hodnotě právě v tom bodě, jehož okolí nás zajímá, dále pak na velikosti zvoleného malého čísla a nakonec na nějaké kombinaci parametrů odvozených ze základní funkce v daném bodě. Tato *odvozenina*, vytvořená z parametrů funkce a její funkční hodnoty v příslušném bodě, se právě nazývá derivace. Formálně lze psát, že naše aproximace funguje jako

$$\Delta x \ll x_0 : f(x_0 + \Delta x) \approx f(x_0) + \left.\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}\right|_{x_0} \cdot \Delta x\,,$$

kde hovoříme o *derivaci funkce f dle proměnné x v bodě x_0*. Jako ilustraci si vezměme předchozí případ, kdy jsme měli

$$(1+h)^a \approx 1 + ah\,,$$

pokud tedy definujeme $g(x) = x^a$, můžeme psát

$$\left.\frac{\mathrm{d}g}{\mathrm{d}x}\right|_1 = a\,.$$

Jelikož ve druhém uvedeném příkladě platí

$$(A+B)^a \approx A^a + aA^{a-1}B\,,$$

lze obdobně psát

$$\left.\frac{\mathrm{d}g}{\mathrm{d}x}\right|_A = aA^{a-1}\,.$$

Můžeme zkontrolovat, že tento výraz skutečně funguje pro $A = 1$. Obecně pak z naší lineární aproximace definujeme derivaci funkce v daném bodě jako

$$\left.\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}\right|_{x_0} = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0+\Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}\,.$$

Ohledně limity $\Delta x \to 0$ nám stačí vědět, že indikuje, že $\Delta x \ll 1$ je velmi malé číslo. Přesnou definicí se zde nebudeme zabývat. Derivace funkce je tedy také funkcí, která se může bod od bodu měnit. Často pak vynecháváme konkrétní označení bodu, ve kterém je derivace vyhodnocena, a používáme stejné označení jako v originální funkci. Níže je ve zkratce uveden seznam derivací některých běžných funkcí

$$\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}x^a}{\mathrm{d}x} &= ax^{a-1}\,,\\
\frac{\mathrm{d}\sin x}{\mathrm{d}x} &= \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\sin(x+\Delta x)-\sin(x)}{\Delta x} =\\
&= \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\sin x\cos\Delta x + \sin\Delta x\cos x - \sin x}{\Delta x} =\\
&= \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\sin x + \Delta x\cos x - \sin x}{\Delta x} = \cos x\,,\\
\frac{\mathrm{d}\cos x}{\mathrm{d}x} &= -\sin x\,,\\
\frac{\mathrm{d}\mathrm{e}^x}{\mathrm{d}x} &= \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\mathrm{e}^{x+\Delta x}-\mathrm{e}^x}{\Delta x} = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\mathrm{e}^x\mathrm{e}^{\Delta x}-\mathrm{e}^x}{\Delta x} = \mathrm{e}^x\frac{(1+\Delta x)-1}{\Delta x} = \mathrm{e}^x\,,\\
\frac{\mathrm{d}\ln x}{\mathrm{d}x} &= \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\ln(x+\Delta x)-\ln x}{\Delta x} = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\ln x + \ln\left(1+\frac{\Delta x}{x}\right) - \ln x}{\Delta x} = \frac{1}{x}\,.
\end{aligned}$$

Kombinujeme funkce

Jelikož derivace počítáme ve fyzice velmi často, vyplatí se zamyslet nad jejich algebrou. Je opravdu nezbytné vždy explicitně počítat limitu funkcí? Nebo lze zjistit hodnoty derivací z nějakého množství základních bloků? Ukazuje se, že to možné je; za pomoci několika pravidel.

Prvním pravidlem, které si ukážeme, je linearita. To znamená, že pokud máme dvě funkce $f(x)$ a $g(x)$ a definujeme pomocí nich funkci $h(x) = af(x) + bg(x)$, kde a a b jsou nějaké kontanty, bude platit

$$\frac{\mathrm{d}h}{\mathrm{d}x} = a\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x} + b\frac{\mathrm{d}g}{\mathrm{d}x}\,.$$

Tím pádem derivace součtu funkcí je prostě pouze součet derivací funkcí. O něco složitější chování (a jak se později ukazuje, naprosto zásadní vlastnost derivací) charakterizuje tzv. Leibnizovo pravidlo, které odpovídá na otázku, jak naložit se součinem funkcí. Platí

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}fg}{\mathrm{d}x} &= \lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x)g(x+\Delta x)-f(x)g(x)}{\Delta x} = \\ &= \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\left(f(x)+\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}\Delta x\right)\left(g(x)+\frac{\mathrm{d}g}{\mathrm{d}x}\Delta x\right)-f(x)g(x)}{\Delta x} = f\frac{\mathrm{d}g}{\mathrm{d}x}+g\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}\,,\end{aligned}$$

kde jsme zanedbali druhý řád v Δx v čitateli.

Posledním pravidlem, které budeme odvozovat, je pravidlo pro derivaci složené funkce. Definujme funkci $f(x) = g(h(x))$, kde $g(x)$ i $h(x)$ jsou další funkce. Pak platí

$$\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x} = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{g(h(x+\Delta x))-g(h(x))}{\Delta x} = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{g\left(h(x)+\frac{\mathrm{d}h}{\mathrm{d}x}\Delta x\right)-g(h(x))}{\Delta x}.$$

Pokud lze předpokládat, že $\frac{\mathrm{d}h}{\mathrm{d}x}\Delta x = \Delta h$ je stále malé číslo, dostaneme

$$\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x} = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{g(h(x))+\frac{\mathrm{d}g}{\mathrm{d}h}\frac{\mathrm{d}h}{\mathrm{d}x}\Delta x-g(h(x))}{\Delta x} = \frac{\mathrm{d}g}{\mathrm{d}h}\frac{\mathrm{d}h}{\mathrm{d}x}.$$

Toto pravidlo se označuje jako řetězové a bude hrát důležitou roli při odvozování derivací některých složitých funkcí.

Fyzikální význam derivací

Ačkoli je tento matematický aparát velmi zajímavý, jeho fyzikální význam je snad ještě zajímavější. Už tušíme, že schopnost charakterizovat chování nějaké funkce v okolí určitého bodu pomocí lineární aproximace je klíčová ke zjednodušení popisu chování mnoha systémů. Nyní nám derivace umožňuje popsat, jak rychle se příslušná funkce mění v okolí daného bodu – derivace určuje *míru změny veličiny*. Efektivně to znamená, že pro dostatečně malé okolí bodu nějaké funkce lze tuto funkci aproximovat jako přímku, přičemž směrnice této přímky je dána právě derivací v tomto bodě.

Popis míry změny veličiny je jedním z ústředních bodů jakéhokoliv fyzikálního zkoumání. Například v kinematice často sledujeme pozici určitého hmotného bodu v závislosti na čase. Pokud se zaměříme na velmi krátký časový interval, lze trajektorii bodu popsat přímkou, tj. předpokládáme, že se bod v tomto časovém úseku pohybuje víceméně rovnoměrně nebo je v klidu. Mírou změny polohy je v tuto chvíli zřejmě rychlost. Z toho lze usoudit, že rychlost je derivací polohy podle času. Symbolicky zapsáno, pro polohu x jakožto funkci času t (píšeme $x = x(t)$) máme

$$v = \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}\,,$$

kde v je rychlost bodu.

Odvození derivací pro popis dynamiky částic je středobodem newtonovské mechaniky. Zkusme tedy zformulovat Newtonovy zákony v jazyce derivací. První zákon mluví o tom, že tělesa, na která nepůsobí žádná síla, setrvávají v klidu či v rovnoměrném přímočarém pohybu. To znamená, že rychlost tělesa se nemění – míra změny rychlosti tělesa je nulová, což lze s využitím přechozího zapsat jako

$$\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = 0\,.$$

Druhý zákon dává do souvislosti zrychlení a síly působící na těleso. Důležitým zobecněním je, že pokud ponecháme volnost pro změnu hmotnosti s časem, píšeme

$$F = \frac{\mathrm{d}(mv)}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}t} .$$

Třetí zákon nehovoří o změnách čili zůstává v originálním znění.

Pokud se hmotnost tělesa s časem nemění, můžeme psát (což lze jednoduše odvodit z výše uvedených pravidel)

$$F = m\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = m\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2} ,$$

kde $\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2}$ značí *druhou derivaci* polohy podle času, kterou identifikujeme jako zrychlení. Jelikož ve většině případů jsou vnější síly závislé pouze na poloze, rychlosti či času, jsme schopni druhý Newtonův zákon vyjádřit čistě pomocí času, polohy a derivace polohy.

Kmity ve formalismu derivací

Pro závaží na pružině platí Hookův zákon

$$F = -kx ,$$

kde $x = l - l_0$ označuje prodloužení pružinky vzhledem k rovnovážné poloze. Aplikací druhého Newtonova zákona dostáváme

$$m\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2} = -kx .$$

Rovnici, která obsahuje funkce a jejich derivace, se říká diferenciální rovnice. Abychom tuto rovnici vyřešili, potřebujeme najít polohu jako funkci času $x(t)$ takovou, že druhá derivace této funkce bude až na násobící konstantu stejná jako původní funkce. Pokud se podíváme na definice derivací základních funkcí, můžeme si všimnout, že

$$\frac{\mathrm{d}^2\cos z}{\mathrm{d}z^2} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}\left(\frac{\mathrm{d}\cos z}{\mathrm{d}z}\right) = \frac{\mathrm{d}\left(-\sin z\right)}{\mathrm{d}z} = -\cos z .$$

Vidíme, že tato funkce se nám může hodit, ovšem musíme do ní dosadit bezrozměrnou veličinu z, zatímco v původní rovnici hledáme závislost na čase. Jelikož víme, že se jedná o kmity, má smysl vyzkoušet jako bezrozměrný parametr $z = \omega_0 t$ a pokusit se derivovat vzhledem k času místo parametru z. Dostáváme

$$\frac{\mathrm{d}^2\cos(\omega_0 t)}{\mathrm{d}t^2} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\mathrm{d}\cos(\omega_0 t)}{\mathrm{d}\omega_0 t}\frac{\mathrm{d}\omega_0 t}{\mathrm{d}t}\right) = -\omega_0\frac{\mathrm{d}\sin(\omega_0 t)}{\mathrm{d}t} = -\omega_0^2\cos(\omega_0 t) .$$

Nyní už jen stačí, aby tato funkce měla rozměr vzdálenosti. K tomu ji stačí vynásobit konstantní amplitudou kmitů A, čímž dostaneme $x(t) = A\cos(\omega_0 t)$. Odtud plyne

$$\begin{aligned} m\frac{\mathrm{d}^2A\cos(\omega_0 t)}{\mathrm{d}t^2} &= -kA\cos(\omega_0 t) , \\ -m\omega_0^2A\cos(\omega_0 t) &= -kA\cos(\omega_0 t) , \\ \omega_0^2 &= \frac{k}{m} , \end{aligned}$$

což není nic jiného než klasický vzorec pro přirozenou frekvenci kmitů.

Na tomto příkladě vidíme sílu formalismu derivací. Za cenu rozvoje matematického aparátu jsme se mohli zcela vyhnout diskuzi o fázovém prostoru, analytické geometrii kružnice a podobným problémům. Derivace tedy představují výrazně algebraičtější cestu k zodpovězení fyzikálních problémů. Samozřejmě, může se zdát, že jsme si při výše uvedeném postupu museli náhodně tipnout funkci času s vhodnými vlastnostmi. Není tomu tak – pro řešení diferenciálních rovnic existují sofistikované postupy, ty však jdou za rámec tohoto seriálu. Pro složitější problémy jsou derivace nepostradatelným nástrojem už jen proto, že například odpovídající trajektorie ve fázovém prostoru nemají analyticky popsatelný tvar.

Princip superpozice

Tento princip výrazným způsobem zmenšuje počet všech možných řešení, která musíme hledat pro danou *lineární* diferenciální rovnici. Jak vypadá lineární diferenciální rovnice? Opět platí standardní definice linearity, tj. pokud máme funkce $f(x)$ a $g(x)$, které jsou obě samostatně řešením diferenciální rovnice, tak i $af(x)+bg(x)$, kde a, b jsou konstanty, je řešením dané rovnice. Podívejme se například na druhý Newtonův zákon pro závaží na pružině. Pro polohu $x(t)$ jako funkci času platí

$$m\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2} = -kx\,.$$

Pokud definujeme $g(t) = ax(t)$, dostaneme

$$m\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}t^2}\left(\frac{g}{a}\right) = -k\frac{g}{a}\,.$$

Jelikož je derivace lineární, můžeme psát

$$\frac{m}{a}\frac{\mathrm{d}^2g}{\mathrm{d}t^2} = -k\frac{g}{a}\,,$$
$$m\frac{\mathrm{d}^2g}{\mathrm{d}t^2} = -kg\,,$$

a tedy i $g(t)$ je validním řešením této diferenciální rovnice. Podobně lze ukázat, že pokud máme ještě nějaké $h(t) = g(t) + x(t)$, pak sečtením rovnic dostaneme

$$m\frac{\mathrm{d}^2g}{\mathrm{d}t^2} + m\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2} = -kg - kx = -k\left(g + x\right)$$

a z linearity derivace vyplývá

$$m\frac{\mathrm{d}^2\left(g + x\right)}{\mathrm{d}t^2} = m\frac{\mathrm{d}^2h}{\mathrm{d}t^2} = -kh\,.$$

Říkáme, že h je lineární kombinací neboli superpozicí funkcí g a x. Významem principu superpozice je fakt, že z několika různých řešení dokážeme sestrojit všechna ostatní, která se typicky liší jen v počátečních a okrajových podmínkách úlohy. Těchto řešení může být obecně nekonečně mnoho.

Fáze a komplexní čísla

Komplexní čísla rozšiřují obor reálných čísel zavedením imaginární jednotky i. Ta má unikátní vlastnost, kterou nemá žádné reálné číslo, totiž

$$\mathrm{i}^2 = -1\,.$$

Jinak se imaginární jednotka chová jako reálné číslo, tj. lze ji sčítat, odčítat, násobit, mocnit atd. Těmito operacemi vznikají čísla, která jsou zčásti reálná a zčásti imaginární – říkáme jim komplexní. Každé komplexní číslo z lze vyjádřit v tzv. algebraickém tvaru

$$z = x + \mathrm{i}y\,,$$

kde x a y jsou reálná čísla. Pak hovoříme o reálné části $\operatorname{Re} z = x$ komplexního čísla a o jeho imaginární části $\operatorname{Im} z = y$.

Jelikož reálná čísla můžeme vnímat jako číselnou osu, můžeme přidání imaginární jednotky i vnímat jako přidání nové dimenze. Komplexní čísla, která jsou kombinací čistě reálných a čistě imaginárních čísel, lze pak vnímat jako vektory v (tzv. Gaussově) rovině, viz obrázek 1. Definujme absolutní hodnotu komplexního čísla jako velikost tohoto vektoru

$$|z| = \sqrt{x^2 + y^2}\,.$$

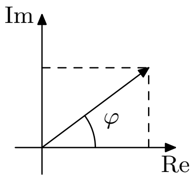
Úhel, který příslušné vektory svírají s reálnou osou, bude

$$\operatorname{tg}\varphi = \frac{y}{x}\,.$$

Uvědomme si však, že úhel φ je 2π-periodický, zatímco funkce arctg je jen π-periodická. Pro výpočet φ tak musíme použít jiný vzorec, například

$$\varphi = \operatorname{atan2}(y, x)\,,$$

kde funkce atan2 je definována právě jako prostředek pro výpočet úhlu v rovině. Jedná se v podstatě o funkci $\operatorname{arctg}(y/x)$, u níž se ale mění znaménko podle kvadrantů.



Obr. 1: Komplexní číslo jako vektor v komplexní rovině. Horizontální osa představuje reálná čísla a vertikální osa je osou imaginární.

Algebra komplexních čísel je velmi bohatá a v tomto seriálu není dost prostoru, abychom ji mohli obsáhnout celou. Pro nás nejdůležitější vlastnost komplexních čísel je popsána Eulerovou rovnicí, která definuje komplexní exponenciálu jako

$$\mathrm{e}^{\mathrm{i}y} = \cos y + \mathrm{i}\sin y\,,$$

kde y je reálné číslo. Exponenciálu z obecného komplexního čísla $x + \mathrm{i}y$ už spočítáme snadno díky rovnosti

$$\mathrm{e}^{x+\mathrm{i}y} = \mathrm{e}^x \mathrm{e}^{\mathrm{i}y} = \mathrm{e}^x \left(\cos y + \mathrm{i} \sin y\right) \,.$$

K čemu je nám tento vztah užitečný? Umožňuje nám převést algebru goniometrických funkcí na algebru exponenciál. Ty mají z hlediska derivací velmi výhodné vlastnosti.

Ve fyzikálních systémech se často komplexní čísla zavádějí ve chvíli, kdy je potřeba pracovat s fází kmitání. Tu lze totiž reprezentovat úhlem komplexního čísla v Gaussově rovině. Kmity samotné potom představuje rotující vektor v této rovině. Zde by měla být jasná analogie s fázovým prostorem – v něm obíhal bod reprezentující stav systému po kružnici. V komplexní rovině bude takový bod obíhat taktéž po kružnici.

Kružnice je množina všech bodů se stejnou vzádleností od středu, proto ji budeme reprezentovat jako množinu všech komplexních čísel se stejnou absolutní hodnotou A. Pro úhel φ definujeme goniometrický tvar komplexního čísla jako

$$z = A \left(\cos \varphi + \mathrm{i} \sin \varphi\right) \,.$$

Fyzikálním významem A je amplituda kmitů, zatímco úhel $\varphi = \omega t$ představuje fázi. Ve fázovém prostoru byla poloha reprezentována jedním z rozměrů prostoru, v komplexní rovině bude polohu představovat reálná část

$$x = \operatorname{Re} z = A \cos \omega t \,.$$

Nyní využijeme komplexní exponenciálu a zápis zjednodušíme na

$$z = A\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega t} \,,$$
$$x = \operatorname{Re}\left(A\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega t}\right) \,.$$

V tomto formalismu lze také velmi snadno řešit fázové posuny. Pokud je fázový posun bodu roven φ_0, pak bod v komplexní rovině bude dán jako

$$z = A\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\omega t + \varphi_0)} = A\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega t} = \hat{A}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega t} \,.$$

Nyní je tedy fáze zcela obsažena v násobící konstantě, ze které jsme udělali komplexní číslo. Její absolutní hodnota má však stále význam amplitudy, protože platí $A = \left|\hat{A}\right|$.

Derivace komplexních funkcí a fourierovská substituce

V tomto seriálu se budeme zabývat pouze derivacemi funkcí, které mají reálný argument (tj. definiční obor leží zcela na reálné ose), ale komplexní hodnoty. Typickým příkladem je exponenciála reprezentující kmity

$$f(t) = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega t} \,.$$

Pravidla pro derivace, která jsme odvodili pro čistě reálná čísla, platí i pro funkce s komplexními hodnotami. Toto je vlastně důsledkem linearity derivace, protože

$$\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}\left(\operatorname{Re} f + \mathrm{i} \operatorname{Im} f\right)}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d} \operatorname{Re} f}{\mathrm{d}t} + \mathrm{i}\frac{\mathrm{d} \operatorname{Im} f}{\mathrm{d}t} \,.$$

V tomto výrazu už figurují pouze derivace reálných funkcí.

Vraťme se zpět ke komplexní exponenciále. Víme, že

$$\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}e^{\mathrm{i}\omega t}}{\mathrm{d}\left(\mathrm{i}\omega t\right)} \cdot \frac{\mathrm{d}\left(\mathrm{i}\omega t\right)}{\mathrm{d}t} = e^{\mathrm{i}\omega t} \cdot \mathrm{i}\omega = \mathrm{i}\omega f\,.$$

Dále lze obdobným způsobem ukázat, že platí

$$\frac{\mathrm{d}^2 f}{\mathrm{d}t^2} = \mathrm{i}^2\omega^2 f = -\omega^2 f\,,$$

což je vlastně přímo rovnice harmonických kmitů. V případě, že $f(t)$ je funkce popisující kmitání, dostáváme jednoduchý předpis, jak nahrazovat derivace v rovnicích, a to ve tvaru

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \rightarrow \mathrm{i}\omega\,,$$
$$\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}t^2} \rightarrow -\omega^2$$

a obdobně pro vyšší mocniny. Tato substituce nemá odborný název, ve zkratce ji zde budeme označovat jako fourierovskou substituci.

Jednoduchá molekula

Uvažujme nyní jednoduchý fyzikální systém, na němž si prakticky ukážeme některé postupy, které jsme odvodili výše. Mějme dvě částice o stejné hmotnosti m, jež jsou spojeny pružinou s tuhostí k a s nulovou klidovou délkou. Částice se mohou pohybovat pouze v jednom rozměru, jejich pozice budeme proto udávat jako body x_1, x_2 na souřadnici x.

Síly působící na částice mají stejnou velikost, ale opačný směr. Nechť je první částice před druhou čili je splněna podmínka $x_1 < x_2$. Potom pro sílu působící na první, resp. druhou částici platí

$$F_1 = k\left(x_2 - x_1\right)\,,$$
$$F_2 = -k\left(x_2 - x_1\right)\,.$$

Druhý Newtonův zákon použijeme na každou částici zvlášť s výsledky

$$m\frac{\mathrm{d}^2 x_1}{\mathrm{d}t^2} = F_1 = k\left(x_2 - x_1\right)\,,$$
$$m\frac{\mathrm{d}^2 x_2}{\mathrm{d}t^2} = F_2 = k\left(x_1 - x_2\right)\,.$$

Lze předpokládat, že tento systém bude nějakým způsobem oscilovat, tj. že řešení pohybových rovnic bude ve formě

$$x_1 = \mathrm{Re}\left(\hat{A}e^{\mathrm{i}\omega t}\right)\,,$$
$$x_2 = \mathrm{Re}\left(\hat{B}e^{\mathrm{i}\omega t}\right)\,,$$

kde $\hat{A}$ a $\hat{B}$ jsou (potenciálně komplexní) konstanty a ω je neznámá frekvence oscilací. Do druhého Newtonova zákona dosadíme fourierovskou substituci

$$-m\omega^2 x_1 = kx_2 - kx_1\,,$$
$$-m\omega^2 x_2 = kx_1 - kx_2\,.$$

Rovnice vydělíme m a zavedeme konstantu

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}\,,$$

čímž je převedeme do tvaru

$$\left(\omega_0^2 - \omega^2\right) x_1 = \omega_0^2 x_2\,,$$
$$\left(\omega_0^2 - \omega^2\right) x_2 = \omega_0^2 x_1\,.$$

Jednoduchými algebraickými úpravami dostaneme

$$x_1 = \frac{\left(\omega_0^2 - \omega^2\right)^2}{\omega_0^4} x_1\,.$$

Odtud je vidět, že máme *dvě* možná řešení – jak $\omega = 0$, tak $\omega = \sqrt{2}\omega_0$. Existence dvou řešení je pro podobné problémy typická, neboť dvě oscilující částice znamenají dva stupně volnosti systému. Mírně atypická je přítomnost řešení $\omega = 0$, které má význam neoscilujícího řešení. V tomto případě platí $x_1 = x_2$, což odpovídá rovnoměrnému přímočarému pohybu obou částic tak, že pružina mezi nimi není vůbec natažená.

Pro druhý případ (například dosazením do první rovnice) dostáváme

$$x_2 = \frac{\left(\omega_0^2 - \omega^2\right)^2}{\omega_0^2} x_1 = -x_1\,,$$

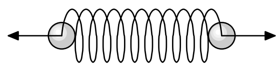
což je možné číst tak, že částice oscilují v protifázi. Dosadíme si z komplexního vyjádření

$$\operatorname{Re}\left(\hat{B}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega t}\right) = -\operatorname{Re}\left(\hat{A}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega t}\right)\,,$$
$$\operatorname{Re}\hat{B}\operatorname{Re}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega t} - \operatorname{Im}\hat{B}\operatorname{Im}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega t} = -\operatorname{Re}\hat{A}\operatorname{Re}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega t} + \operatorname{Im}\hat{A}\operatorname{Im}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega t}\,.$$

Tato rovnice musí platit pro všechny časy t, konkrétně i pro $t = 0$ a $t = \frac{\pi}{2\omega}$. V nich přechází do tvaru

$$\operatorname{Re}\hat{B} = -\operatorname{Re}\hat{A}\,,$$
$$-\operatorname{Im}\hat{B} = \operatorname{Im}\hat{A}\,,$$

takže můžeme psát $\hat{B} = -\hat{A}$. Tento výsledek bychom mohli interpretovat také pomocí fázového posunu jako $\hat{B} = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi}\hat{A}$, což znamená přesnou protifázi, jak nám již vyšlo výše.



Obr. 2: Naznačený pohyb částic při oscilujícím řešení.

Ověřme princip superpozice. Ukázali jsme, že rovnoměrný přímočarý pohyb v případě, kdy jsou částice na stejné pozici, je jedním z možných řešení. Zapišme jej ve tvaru

$$x = vt + x_0\,,$$

kde v je rychlost rovnoměrného pohybu a x_0 je počáteční souřadnice. Zároveň máme oscilující řešení

$$\begin{aligned} x_1 &= \operatorname{Re}\left(\hat{A}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega t}\right) , \\ x_2 &= -\operatorname{Re}\left(\hat{A}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega t}\right) . \end{aligned}$$

Mělo by platit, že pokud sečteme $x + x_1 = x_1'$ a $x + x_2 = x_2'$, získáme také validní řešení pro náš systém. Dosadíme-li například do první rovnice, dostaneme

$$\begin{aligned} m\frac{\mathrm{d}^2 x_1'}{\mathrm{d}t^2} &= m\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}t^2}\left(vt + x_0 + \operatorname{Re}\left(\hat{A}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega t}\right)\right) = m\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(v + \operatorname{Re}\left(\mathrm{i}\omega\hat{A}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega t}\right)\right) = \\ &= m\operatorname{Re}\left(\mathrm{i}^2\omega^2\hat{A}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega t}\right) = -m\omega^2\operatorname{Re}\left(\hat{A}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega t}\right) . \end{aligned}$$

Pro pravou stranu téže rovnice platí

$$k\left(x_2' - x_1'\right) = k\left(x_2 - x_1\right) = -2k\operatorname{Re}\left(\hat{A}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega t}\right) .$$

Jelikož $\omega^2 = \frac{2k}{m}$, nové řešení stále vyhovuje původní rovnici.

Výhled na příště – vše je lineární

V tomto díle jsme si ukázali, jak linearita harmonických oscilací umožňuje relativně jednoduše řešit i zdánlivě složité systémy. Stačí nám vždy nalézt pouze několik speciálních řešení našich pohybových rovnic a ostatní možné pohyby můžeme vyjádřit jako superpozici těchto řešení. Odborně se jim říká normální mody a budeme se jimi zabývat i v příštím díle seriálu, kde si představíme další velmi užitečný matematický formalismus – lineární algebru.

Fyzikální korespondenční seminář je organizován studenty MFF UK. Je zastřešen Oddělením propagace a mediální komunikace MFF UK a podporován Ústavem teoretické fyziky MFF UK, jeho zaměstnanci a Jednotou českých matematiků a fyziků.