Úloha VI.P ... vesmír ve 4D

10 bodů; (chybí statistiky)

Pravděpodobně už jste slyšeli, že planety i libovolná jiná tělesa se v centrálním gravitačním poli pohybují po kuželosečkách (v případě Sluneční soustavy jsou to elipsy s malou výstředností). Prozkoumejte, jak by vypadaly trajektorie planet ve vesmíru, kde by gravitační síla závisela na převrácené třetí mocnině vzdálenosti místo na druhé.

Nápověda *Může se vám hodit Binetův vzorec.*

Matěj rád vyšší dimenze.

Najprv sa zamyslime, ako by sa teleso pod vplyvom centrálnej sily pohybovalo v 4D vesmíre. Vzhľadom na to, že sila pôsobí do centra, pôsobí na planétu zrýchlením od centra a teleso pri pohybe ostáva v 2D rovine danej vektorom okamžitej rýchlosti telesa a polohovým vektorom. Na popis nám teda stačia dve súradnice, vzdialenosť od stredu r a jedna uhlová súradnica θ, popisujúce pohyb v tejto rovine.

Vo vesmíre s o jedna vyššou dimenziou by bola gravitačná sila pôsobiaca ako inverzná tretia mocnina vzdialenosti prirodzená. Dôležité je totiž, že by spĺňala Gaussov zákon.[1] Teda napríklad by súčin 3D plochy pre body s $r =$ konst (tj. hyperguľové plochy) a gravitačného zrýchlenia okolo bodového zdroja nezávisel na polomere. V našom 3D vesmíre je však aj práve kvôli tomu problém nájsť silu, ktorá by pôsobila ako $F \propto r^{-3}$.

Už bez výpočtov vieme vďaka Bertrandovmu teorému[2] povedať, že dostaneme aspoň nejaké viazané riešenie (teda také, že častica neunikne do nekonečna), ktoré ale všeobecne nemusí tvoriť uzavretá trajektória. Uzavreté trajektórie pre všetky viazané orbity dáva totiž len Newtnovský/Coloumbovský potenciál a radiálny harmonický oscilátor, teda $F \propto r^{-2}$ a $F \propto r$.

Pohyb telesa v centrálnom poli, presnejšie jeho trajektóriu, popisuje Binetov vzorec[3]

$$F(u^{-1}) = -mh^2u^2 \left(\frac{\mathrm{d}^2u}{\mathrm{d}\theta^2} + u\right) ,$$

kde $u = 1/r$, m je hmotnosť hmotného bodu, ktorého pohyb vyšetrujeme, a $h = L/m$ je špecifický moment hybnosti, teda moment hybnosti na 1 kg hmotnosti telesa. Moment hybnosti je konštantný, protože na teleso pôsobí sila iba v radiálnom smere. Ak dosadíme za silu

$$F(r) = -\frac{K}{r^3} = -Ku^3 ,$$

dostávame po úprave finálnu rovnicu pre trajektóriu telesa

$$\frac{\mathrm{d}^2u}{\mathrm{d}\theta^2} + \left(1 - \frac{K}{mh^2}\right) u = 0 .$$

Konštanta K určuje veľkosť príťažlivej sily, teda zodpovedá hmote hypotetického centrálneho telesa v 4D vesmíre. Riešením tejto rovnice sú tzv. Cotesove špirály[4] a triviálne prípady kružnica a priamka cez počiatok (alebo jej časť).

Označme $1 - \frac{K}{mh^2} = p^2$, kde parameter p môže byť všeobecne komplexné číslo. Potom vyššie uvedený vzťah prejde do tvaru

$$\frac{\mathrm{d}^2u}{\mathrm{d}\theta^2} + p^2u = 0 ,$$

čo je lineárna diferenciálna rovnica 2. rádu. Jej riešenia majú rôzny tvar v závislosti na veľkosti parametra p^2.

[1] https://en.wikipedia.org/wiki/Gauss's_law_for_gravity
[2] https://en.wikipedia.org/wiki/Bertrand's_theorem
[3] https://en.wikipedia.org/wiki/Binet_equation
[4] https://en.wikipedia.org/wiki/Cotes's_spiral

- Pre $p^2 > 0$ dostávame $u = A\sin(p\theta) + B\cos(p\theta) = C\cos(p\theta + \varepsilon)$, čo je epišpirála.
- Pre $p^2 = 0$ dostávame $u = A\theta + B = C(\theta + \varepsilon)$, teda hyperbolickú špirálu.
- Pre $p^2 < 0$ dostávame $u = A\sinh(p'\theta) + B\cosh(p'\theta)$, kde $p' = \mathrm{i}p$, čomu sa hovorí Poinsotove špirály. V závislosti na veľkosti A, B sa dá vzťah upraviť na jednu z troch možností

$$
\begin{aligned}
u &= C\sinh\left(p'\theta + \varepsilon\right) ,\\
u &= C\cosh\left(p'\theta + \varepsilon\right) ,\\
u &= C\exp\left(p'\theta\right) .
\end{aligned}
$$

Konštanty A, B, C, ε sa určia z počiatočných podmienok. Konštanta C škáluje veľkosť, konštanta ε mení natočenie v rovine obehu.

Zostáva vyšetriť, ako sa jednotlivé funkcie správajú. Pre $u = 0$ je objekt v nekonečne, pre $u = \infty$ je v centrálnom bode. Epišpirála teda prichádza z nekonečna do vzdialenosti $r = 1/C$ a vracia sa naspäť, pričom v uhlovej súradici opíše uhol $\varphi = \pi/p$. Poinsotove špirály majú charakter špirály, odvíjajú sa okolo počiatku. Pre nás podstatným rozdielom je, že sínusová ide do nekonečna takmer priamo, exponenciálna sa aj vo veľkej vzdialenosti stále otáča a kosínusová ide len k hodnote $r = 1/C$, kde sa začne opäť navíjať a padať späť do stredu. Hyperbolická špirála sa podobá sínusovej.

Pozrime sa na špeciálne prípady. Pre úzku epišpirálu (pre veľké $p^2 \gg 1$) prebieha pohyb limitne po polpriamke z nekonečna smerom k počiatku a naspäť. To zodpovedá zápornej hodnote A, čiže odpudivej sile.

Prípad s $p = 1$ popisuje situáciu s nulovou silou, a preto vyjde pohyb po priamke.

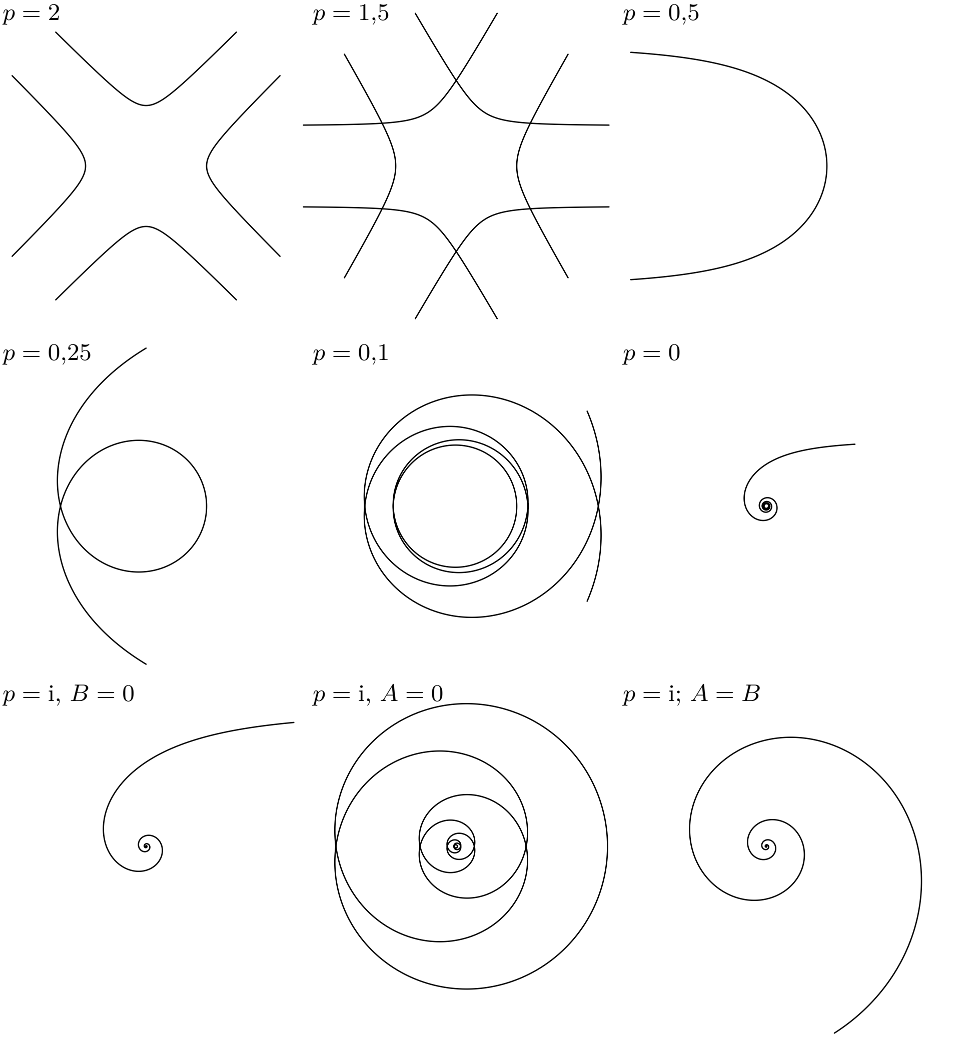
Pre Poinsotove špirály a veľkú zápornú hodnotu $p^2 \ll -1$ (čo zodpovedá veľkej príťažlivej sile) dostaneme nasledujúce limitné prípady. Pre kosínovú Poinsotovu špirálu ide o pohyb po úsečke priamo do centrálneho telesa, pre sínusovú o pohyb po polpriamke medzi nekonečnom a stredom. Exponenciálny prípad je sebepodobný.

Špeciálnym prípadom možnosti, ktorá viedla k hyperbolickej špirále, je pre $A = 0$ kružnicová trajektória. Môžeme teda zhodnotiť, že kružnice sú jediné uzavreté trajektórie, a navyše sú nestabilné (pri malej výchylke počiatočných podmienok prejdú na jednu zo špirál). Ostatné trajektórie vedú buď z centra alebo nekonečna, resp. opačným smerom.

Záverom môžeme konštatovať, že keby mal vesmír štyri rozmery a fundamentálne fyzikálne sily by záviseli na r^{-3}, nemohol by vzniknúť život v takej podobe, ako ho poznáme. Kvôli neexistencii stabilných uzavretých trajektórií by nebol možný vznik ekvivalentu slnečnej sústavy, protože všetko by buď do seba navzájom spadlo alebo by odletelo do nekonečna. Vyvstáva otázka, či by bolo možné, aby sa v 4D svete sformovali atómy. Avšak pre odpoveď by sme už museli použiť kvantovú mechaniku.

Jozef Lipták
`liptak.j@fykos.cz`

Fyzikální korespondenční seminář je organizován studenty MFF UK. Je zastřešen Oddělením propagace a mediální komunikace MFF UK a podporován Ústavem teoretické fyziky MFF UK, jeho zaměstnanci a Jednotou českých matematiků a fyziků.



Obr. 1: Schéma trajektórií pre vybrané hodnoty p.