Úloha VI.4 ... zděšené vlasy

7 bodů; (chybí statistiky)

Z radosti nad koncem zkouškového začaly Dance přibývat vlasy konstantní rychlostí. Po nějaké době si všimla, že jí jeden vypadl, a zděsila se. Čím více vlasů jí vypadlo, tím větší cítí stres a o to rychleji jí vypadávají další. Přesněji, rychlost vypadávání vlasů je přímo úměrná počtu již vypadnutých vlasů. Rychlost přibývání vlasů zůstává stejná. Opět nás zajímá, kdy Dance vypadne poslední vlas? *Tohle chtěl Jáchym spočítat už dlouho.*

Počet vlasů, které Dance přibyly od počátku v čase t_0 do nějakého času t, označíme $n_\mathrm{p}(t)$. Počet vypadnutých vlasů za stejné časové období bude $n_\mathrm{v}(t)$. Označíme-li počáteční počet vlasů jako N_0, v čase t jich Danka bude mít

$$N(t) = N_0 + n_\mathrm{p}(t) - n_\mathrm{v}(t)\,.$$

Pro další řešení úlohy je velmi podstatné, že funkce $n_\mathrm{p}(t)$ a $n_\mathrm{v}(t)$ na sobě nijak nezávisí, čili je můžeme spočítat zvlášť. Pokud by tomu tak nebylo, postup by se značně zkomplikoval. Z tohoto příkladu je vidět, že je často výhodné zamyslet se nejdříve nad tím, do jakých nezávislých funkcí by se dalo řešení rozložit. Počet vlasov je pomerne veľké číslo, v našich úvahách preto prejdeme od diskrétneho počítania vlasov po jednom k spojitým veličinám. Samotný výsledok by to malo ovplyvniť len zanedbateľne.[1]

Ze zadání víme, že vlasy přibývají konstantní rychlostí, kterou označíme a. Potom zřejmě

$$n_\mathrm{p}(t) = a\left(t - t_0\right)\,.$$

Dále máme zadáno, že rychlost vypadávání je přímo úměrná počtu již vypadlých vlasů. Označíme-li konstantu úměrnosti b, bude platit

$$\frac{\mathrm{d}n_\mathrm{v}}{\mathrm{d}t}(t) = b n_\mathrm{v}(t)\,.$$

Separací proměnných a následnou integrací snadno zjistíme, že řešením této jednoduché diferenciální rovnice je exponenciála

$$n_\mathrm{v}(t) = \mathrm{e}^{b(t-t_0)}\,.$$

Všimněme si, že $n_\mathrm{v}(t_0) = 1$, čili jsme jako t_0 zvolili okamžik, ve kterém Dance vypadl první vlas. Nyní už můžeme napsat výslednou funkci

$$N(t) = N_0 + a\left(t - t_0\right) - \mathrm{e}^{b(t-t_0)}\,.$$

Nás samozřejmě zajímá, pro jaký čas t platí $N(t) = 0$. Tento čas není možné obecně vyjádřit bez použití speciálních funkcí, ale se znalostí konstant a a b bychom jej snadno dokázali určit numericky. Můžeme se alespoň pokusit o dolní odhad – pokud by byla konstanta a nulová, řešením by bylo

$$t_\mathrm{min} = t_0 + \frac{1}{b}\ln N_0\,.$$

Pro jakékoli jiné a (předpokládáme $a > 0$) bude hledaný čas t pouze větší, než t_min. Dále také víme, že exponenciála roste výrazně rychleji, než lineární funkce. Proto lze předpokládat, že

[1] samozrejme za predpokladu, že Danka nie je Děd Vševěd.

pro jakékoli „rozumné“ hodnoty a a b se výsledný čas t nebude od dolního odhadu $t_{\min}$ tolik lišit, minimálně se bude řádově shodovat.

Jáchym Bártík
`tuaki@fykos.cz`