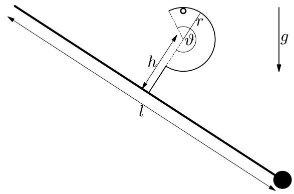
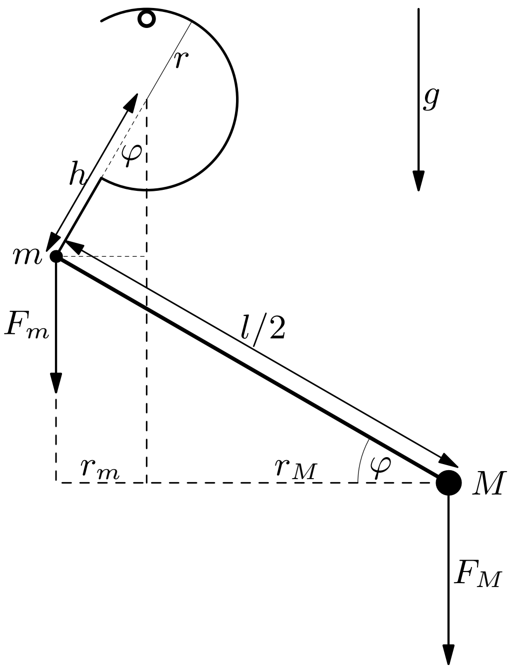
Úloha VI.3 ... ověšená

5 bodů; (chybí statistiky)

Jak těžké závaží můžeme zavěsit na konec ramínka věšáku bez toho, aby se převrhnul? Věšák je tvořen háčkem z velmi lehkého drátu, který je připevněn ke středu rovné dřevěné tyčky o délce $l = 30\,\mathrm{cm}$ a o hmotnosti $m = 200\,\mathrm{g}$. Háček má tvar kružnicového oblouku s poloměrem $r = 2{,}5\,\mathrm{cm}$ a s úhlovým rozpětím $\vartheta = 240^\circ$. Vzdálenost středu oblouku a středu tyčky je $h = 5\,\mathrm{cm}$. Veškeré tření zanedbejte. *Dodo shání nedostatkové zboží.*



Věšáček se bude naklánět vlivem momentů tíhových sil působících na ramínko a závaží.



Obr. 1: Věšáček nakloněný o úhel φ.

Označme tyto momenty po řadě τ_m a τ_M, přičemž M je hledaná hmotnost závaží. Velikost momentu τ_M pak lze vypočítat jako

$$\tau_M = F_M r_M = Mgr_M\,,$$

kde F_M je velikost tíhové síly působící na závaží o hmotnosti M a r_M je rameno této síly (neboli kolmá vzdálenost vektorové přímky síly od osy otáčení).
Analogicky pro druhý moment $\tau_m = F_m r_m = mgr_m$.

V úloze neuvažujeme tření. Proto tíhovou sílu působící nahoru musí kompenzovat pouze normálová síla v bodě dotyku. Háček věšáčku je proto v bodě dotyku vodorovný a vždy orientovaný tak, že střed kružnicového oblouku, který jej tvoří, je přímo pod bodem dotyku. Při náklonu o libovolný úhel φ musí pro ramena r_m a r_M platit (viz obrázek)

$$r_m = h \sin\varphi \,,$$
$$r_m + r_M = \frac{l}{2}\cos\varphi \,.$$

Z čehož vyplývá

$$r_M = \frac{l}{2}\cos\varphi - h\sin\varphi \,.$$

Ve statické situaci se musí momenty sil vyrovnat, čili

$$\tau_m = \tau_M \,,$$
$$mgr_m = Mgr_M \,.$$

Odtud můžeme vyjádřit hledanou hmotnost závaží jakožto funkci úhlu φ

$$M = \frac{r_m}{r_M} m = \frac{h\sin\varphi}{\frac{l}{2}\cos\varphi - h\sin\varphi} m = \frac{m}{\frac{l}{2h\operatorname{tg}\varphi} - 1} \,. \tag{1}$$

Intuitivně bychom čekali, že maximální hmotnost věšáček udrží právě pro maximální úhel náklonu, tedy v našem případě $\varphi_{\max} = \vartheta - 180^\circ = 60^\circ$. Pro tento úhel je maximální hmotnost závaží

$$M(\varphi_{\max}) = \frac{m}{\frac{l}{2h\operatorname{tg}\varphi_{\max}} - 1} \approx 0{,}27\,\mathrm{kg} \,,$$

což je opravdu i správný výsledek. Důkaz, že věšáček udrží největší hmotnost právě pro maximální úhel ale není až tak přímočarý. Na pomoc budeme potřebovat trochu matematické analýzy.

Hledáme maximum funkce $M(\varphi)$ na intervalu $\langle \varphi_{\min}, \varphi_{\max} \rangle = \langle -180^\circ, 60^\circ \rangle$ (věšáček se zřejmě přetočí a spadne pro úhel $\varphi_{\min} = -180^\circ$). Maximum obecné funkce se může nacházet ve třech typech bodů, a to tam,

1. kde je derivace nulová,
2. kde derivace neexistuje a
3. na krajích intervalu, na kterém problém řešíme.

Derivace naší funkce je (za použití řetízkového pravidla pro derivaci složené funkce)

$$\frac{\mathrm{d}M}{\mathrm{d}\varphi}(\varphi) = -m\left(\frac{l}{2h\operatorname{tg}\varphi} - 1\right)^{-2} \frac{l}{2h}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\varphi}\frac{1}{\operatorname{tg}\varphi} = \frac{\frac{l}{2h}m}{\sin^2\varphi\left(\frac{l}{2h\operatorname{tg}\varphi} - 1\right)^2} = \frac{\frac{l}{2h}m}{\left(\frac{l\cos\varphi}{2h} - \sin\varphi\right)^2} \,.$$

Derivace zřejmě nikde není nulová, takže první možnost nám zde nepomůže. Derivace nebude existovat, pokud je jmenovatel roven nule, což nastává právě když

$$\frac{l\cos\varphi}{2h} = \sin\varphi \qquad \Longrightarrow \qquad \operatorname{tg}\varphi = \frac{l}{2h} \,. \tag{2}$$

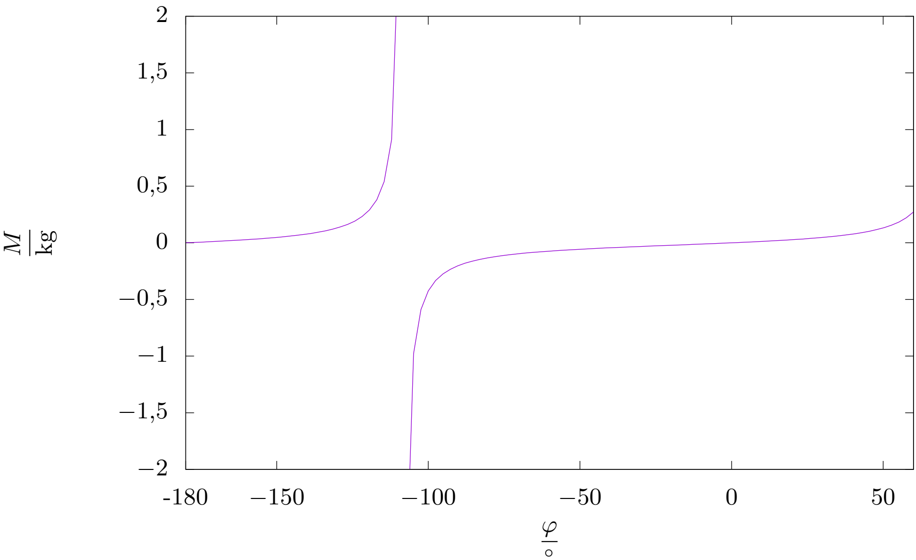
Teoreticky bychom měli zkontrolovat, jestli nedělíme nulou, ale pokud $\cos\varphi = 0$, tak jistě $\sin\varphi \neq 0$, takže se výrazy nerovnají a zkoumaný jmenovatel není roven nule, takže tento případ nás nezajímá.

Dosadíme-li do poslední rovnice naše hodnoty l a h, máme

$$\operatorname{tg}\varphi = \frac{l}{2h} = \frac{0{,}3}{2\cdot 0{,}05} = 3\,,$$

což nastává pro $\varphi \approx 71{,}6^\circ > \varphi_{\max}$. Tento úhel je větší než maximální uvažovaný úhel, takže pro nás tento výsledek nehraje roli. Nutno ovšem podotknout, že funkce tangens je π-periodická, takže se rovná třem i pro úhel $\varphi \approx 71{,}6 - 180 = -108{,}4^\circ$ (a nekonečně mnoho dalších, ale ty už jsou mimo uvažovaný interval).

Pro názornost si zde pomůžeme grafem 2.



Obr. 2: Závislost hmotnosti na úhlu otočení ramínka

Oblast $(-108{,}4, 0)$ odpovídá situaci, kdy jsou hmotný střed ramínka m i závaží M ve stejné polorovině od středu háčku (a ramínko je vzhůru nohama). V takovém případě je pro vyrovnání momentů potřeba záporná hmotnost, protože pro kladnou hmotnost oba momenty míří na stejnou stranu.

Vidíme, že pokud $\varphi \to -108{,}4^\circ$ (čteme φ jde k $-108{,}4^\circ$) zprava, pak $M \to -\infty$.

Pokud $\varphi \to -108{,}4^\circ$ zleva, pak $M \to \infty$. To odpovídá případu, kdy je ramínko opět vzhůru nohama, ale tentokrát jsou hmotné středy v různých polorovinách. Pokud se pak bod M blíží do bodu přesně nad středem háčku, jde maximální hmotnost k nekonečnu. Správně je tedy i odpověď, že ramínko udrží libovolně velkou hmotnost.

Tato rovnováha je ovšem nestabilní a při malém vychýlení se ramínko přetočí. Pokud chceme stabilní rovnováhu, musíme se podívat na třetí možnost – kraje intervalu. Hodnotu $M(\varphi_{\max})$ už jsme vypočítali. Z grafu je zřejmé, že když $\varphi \to -180^\circ$, pak $M \to 0$ (sami si můžete ověřit, že přímo pro -180° hodnota M není definována).

Jedinou nadějí na stabilní maximum je tedy dříve vypočítaná hmotnost $M(\varphi_{\max}) \approx 0{,}27\,\mathrm{kg}$.

Abychom vyšetřili (ne)stabilitu rovnováhy, budeme potřebovat zjistit, jak se mění celkový moment síly působící na systém τ_c v bodě $\varphi_{\max}$. Označme $M_{\max} = M(\varphi_{\max})$ pevně zvolenou hmotnost závaží, dále označme směr momentu τ_M za kladný, pak

$$\tau_c = \tau_M - \tau_m = gM_{\max}r_M - gmr_m = g\left(M_{\max}\frac{l}{2}\cos\varphi - (M_{\max}+m)h\sin\varphi\right) ,$$

kde jsme využili dříve získané vzorce pro r_m a r_M.

Připomeňme, že pro $\varphi_{\max}$ je celkový moment nulový. Změnu celkového momentu vyšetříme pomocí derivace

$$\frac{\mathrm{d}\tau_c}{\mathrm{d}\varphi} = g\left(-M\frac{l}{2}\sin\varphi - (M+m)h\cos\varphi\right) ,$$

pro $\varphi_{\max}$ je $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\varphi}\tau_c \approx -0{,}46$. Derivace je tedy záporná. To znamená, že pokud věšáček malinko vychýlíme z rovnovážné polohy záporným směrem, pak výsledný moment síly bude působit kladným směrem a věšáček se bude vracet do rovnovážné polohy. Obdobně by to platilo pro vychýlení v kladném směru, ale v našem případě by samozřejmě věšáček při takovém vychýlení spadl. Zdá se tedy, že rovnovážná poloha je stabilní z jedné strany. Bohužel při vychýlení v záporném směru se věšáček sice bude vracet do rovnovážné polohy, ale překmitne a stejně spadne. Zdá se, že stabilní rovnovážná poloha zde tedy neexistuje.

Poznámka na konec: Všimněme si ze vztahů (2), že pokud by se věšáček mohl otočit na úhel větší než 60° nebo bychom zvětšili h či zmenšili l, pak by mohla nastat situace, kdy φ, které by tento vztah splňovalo, by spadalo do uvažovaného intervalu, a pak by se maximum nutně nemuselo nacházet na kraji intervalu. V takovém případě by pro náš systém mohla existovat stabilní rovnovážná poloha. Pro obecný věšáček tedy náš výsledek neplatí.

Martin Vaněk
`martin@fykos.cz`