Úloha V.S ... mini a maxi

10 bodů; průměr 4,52; řešilo 44 studentů

1. *Máme PET lahev s vodou, která stojí na nekonečné rovině. V jaké výšce bychom měli vytvořit v lahvi malý otvor, aby voda dostříkla co nejdále od lahve? Lahev po celou dobu nehybně stojí na rovině a otvor prochází kolmo stěnou. Průřez otvoru je výrazně menší než průřez lahve.*
2. *Kam bychom měli umístit otvor (viz předchozí podúloha), pokud chceme, aby byl dostřik nejdelší po jedné minutě? Předpokládejte, že lahev má konstantní průřez S a otvor má výrazně menší průřez s. Pro numerické řešení odhadněte rozumné hodnoty konstant.*
3. *Jaký může mít baterie maximální výkon na spotřebiči, pokud má elektromotorické napětí U_e a vnitřní odpor R_i? Pro jaký odpor spotřebiče to nastane? Popřípadě, pro jakou impedanci to nastane, pokud bude obvod tvořen rezistorem, cívkou a kondenzátorem?*
4. *Jak nejblíže se k sobě mohou dostat dvě jádra dusíku 14, která se pohybují se střední kvadratickou rychlostí odpovídající plynu za normálních podmínek?*
5. *Najděte maximální možnou teplotu, kterou by mohl mít plyn, ve kterém by probíhal děj $p = p_0 \mathrm{e}^{-\alpha V}$, kde α je kladná konstanta a p_0 je tlak plynu v počátečním stavu.*

Karel napínal až do poslední chvíle.

Předně poznamenejme, že jsme akceptovali jak numerická, tak analytická řešení, a to jak s použitím derivací, tak bez nich. Ve vzorovém řešení jsou vybrána ta řešení, která jsme považovali za nejvhodnější pro daný problém, ale nejsou jediná možná.

Dostřik vody

Otvor je dle zadání malý. Můžeme tedy uvažovat, že v celém jeho průřezu vytéká voda stejnou rychlostí. Dále předpokládejme, že dno nádoby je zanedbatelně tlusté. To je pouze z praktických důvodů, aby otvor mohl být libovolně nízko. Voda, která je pod otvorem, totiž experiment nijak neovlivní. Zanedbáváme také všechny odporové síly a povrchové napětí vody. Láhev předpokládáme za shora otevřenou.

Označme výšku hladiny v nádobě H a výšku otvoru nad stolem h. Rychlost výtoku vody je dána výškou vody nad otvorem $H-h$. Díky přenosu tlaku sloupcem vody si můžeme představit, jako by se voda urychlila pádem o odpovídající výšku. Rychlost dostaneme ze zákona zachování mechanické energie

$$mg\left(H-h\right) = \frac{1}{2}mv^2 \qquad \Rightarrow \qquad v = \sqrt{2g\left(H-h\right)}\,.$$

Použili jsme standardní značení m pro hmotnost malého objemu vody, g pro tíhové zrychlení a v pro rychlost. S touto rychlostí voda opustí nádobu kolmo na její povrch. Následuje vodorovný vrh, který si můžeme rozložit na volný pád ve svislé ose a rovnoměrný pohyb ve vodorovné ose. Doba pádu je

$$t = \sqrt{\frac{2h}{g}}\,.$$

Za tento čas se v druhé ose proud vody posune o vzdálenost

$$x = vt = \sqrt{2g\left(H-h\right)}\sqrt{\frac{2h}{g}} = 2\sqrt{\left(H-h\right)h}\,.$$

Proud vody tedy dostříkne na vzdálenost $2\sqrt{(H-h)\,h}$. Zajímavé je, že to nezávisí na tom, jak velké je tíhové zrychlení. Jediné, co stačí předpokládat, je, že tíhové zrychlení je nenulové a konstantní v celé oblasti, kde experiment provádíme.

Vraťme se k původní otázce, a to k maximalizaci vzdálenosti x. Odmocnina je funkcí, která je rostoucí. Jinak řečeno, pokud je maximální její argument, tak je maximální i odmocnina. Stačí proto maximalizovat funkci $f = (H-h)\,h$, kde H považujeme za fixní a měníme h. Funkci upravíme na čtverec

$$f = Hh - h^2 = -\left(h - \frac{H}{2}\right)^2 + \frac{H^2}{4}\,.$$

Z této rovnice je zřejmé, že maximum nastane pro $h = \frac{H}{2}$. Největšího dostřiku tak dosáhneme pro otvor v poloviční výšce lahve. Konkrétně, voda dostříkne do vzdálenosti $x_{\max} = H$. Tím máme odpověď na první otázku.

Druhá otázka je komplikovanější. Tu budeme řešit už pro nějaké konkrétní odhadnuté hodnoty numericky. Už v zadání jsme naznačili, že by mohlo být vhodné využít numerickou simulaci a odhadnout parametry. Nechť počáteční výška hladiny je $H = 25\,\mathrm{cm} = 0{,}25\,\mathrm{m}$. Plochu průřezu lahve odhadneme jako $S = 60\,\mathrm{cm}^2 = 6{,}0\cdot 10^{-3}\,\mathrm{m}^2$. Průřez otvoru pak můžeme řádově odhadnout na $s = 2{,}0\,\mathrm{mm}^2$.

Pro numerickou simulaci využijeme nástroj, který je dostupný téměř všem, a to Microsoft Excel. Není to sice prostředí, které by se běžně používalo pro profesionální fyzikální simulace (popravdě se ve fyzice nepoužívá skoro vůbec), ale v tomto jednoduchém případě nám postačí. Využijeme doplněk „Řešitel“ (v anglické verzi „Solver“), který se sice skrývá v instalaci, ale musíte si ho před prvním použitím zavést (hledejte postup v nápovědě). Alternativně je možné pracovat s nějakým volně dostupným tabulkový procesorem a také není nutné používat nějaký doplněk, který ale nejspíš bude stejně existovat, protože jeden parametr zvládnete optimalizovat manuálně.

Připravíme si list, kde uvedeme definované počáteční hodnoty a konstanty. Sestavíme vzorce na změnu výšky hladiny v láhvi. Odhadli jsme, že časový krok 0,01 s bude postačující pro naše potřeby. To by mělo stačit pro přesnost výsledku na tři platné cifry. Náš algoritmus je následující. V daném čase vypočítáme z výšky hladiny rychlost výtoku kapaliny. Na základě rychlosti výtoku určíme objem kapaliny, který vyteče, a následně i pokles hladiny v láhvi.[1] Pokles hladiny použijeme pro změnu aktuální výšky hladiny vody v láhvi. Pomocí doplňku Řešitel pak maximalizujeme hodnotu v buňce s vzdáleností dostřiku vody podle změn buňky s výškou otvoru nad podložkou. Výpočet si můžete prohlédnout v souboru.[2] Pokud byste se zajímali o lepší metody numerických výpočtů, podívejte se na seriál 31. či 21. ročníku FYKOSu.

Pro námi odhadnuté hodnoty a pro otevřený vršek láhve je optimální vytvořit otvor 11,7 cm nad povrchem stolu. Po minutě bude dostřik z této výšky 21,9 cm.

V rámci zadání byl v úloze skrytý bonus, a to prozkoumat i variantu s uzavřenou láhví. Pro ideální láhev s amosférickým tlakem vzduchu je dostřik na počátku stejný. Nedošlo totiž ještě k poklesu hladiny, a tedy ani k poklesu tlaku nad kapalinou. V případě, že sledujeme výtok po minutě, je situace výrazně složitější. Předpokládáme, že na počátku byl u hladiny vody atmosférický tlak. Rychlost výtoku pak počítáme z rozdílu tlaků uvnitř na úrovni otvoru ve stěně a atmosférického tlaku venku. Když bude rozdíl nulový, výtok z lahve se zastaví. Pro

[1] Mohli bychom nějaké kroky vynechat, jeden z těchto dvou údajů je vlastně zbytečný. Ale je dobré sledovat ve výpočtu i nějaké vedlejší veličiny, když hledáte chybu. Také je vhodné optimalizovat postup, když chcete výsledky zpřesnit a jste omezeni výpočetním výkonem. Nicméně s použitím běžného dnešního notebooku a Excelu není problém si dovolit „luxus“ pár sloupečků navíc.

[2] `https://fykos.cz/_media/rocnik33/ulohy/prilohy/5/s/reseni-r33s5p8-simulace.xlsx?cache=`

potřeby úlohy budeme předpokládat, že vniřní průřez láhve je konstantní až do výšky, kterou zvolíme jako $H_\mathrm{l} = 30\,\mathrm{cm}$.

Hlavním problémem, na který narazíme pro takto nastavené parametry, je, že výtok po nějakých pár sekundách přestane. Konkrétně, pokud se pak snažíme alespoň maximalizovat dobu výtoku, dosáhneme 3,4 s pro nulovou výšku otvoru nad podložkou. Pokud otvor umístíme výše, pak je doba ještě kratší. Můžeme zmenšit otvor v láhvi či zvětšit prostor v láhvi nad hladinou. Obě tyto změny mohou vést k tomu, že voda z jinak dokonale těsné láhve bude vytékat déle. Láhev moc zvětšovat nechceme, tak upřednostníme zmenšení otvoru. Zmenšení plochy na desetinu nepostačí, zmenšíme ji proto na setinu, neboli na $0{,}02\,\mathrm{mm}^2$. Potom výsledný maximální dostřik po jedné minutě vyjde 18,8 cm pro otvor ve výšce 10,8 cm nad povrchem stolu.

Pro úplnost si ještě uveďme analytické řešení. Nechť y je výška hladiny v čase t, potom rychlost výtoku bude

$$v = \sqrt{2g\,(y-h)}\,.$$

Změna objemu kapaliny v lahvi za nějaký malý čas $\mathrm{d}t$ bude $\mathrm{d}V = -sv\mathrm{d}t$, čemuž odpovídá změna výšky hladiny

$$\mathrm{d}y = -\frac{s}{S}v\mathrm{d}t = -\frac{s}{S}\sqrt{2g\,(y-h)}\mathrm{d}t.$$

Tuto jednoduchou diferenciální rovnici snadno vyřešíme a dostaneme výraz

$$y = h + \left(\sqrt{H-h} - \sqrt{\frac{g}{2}}\frac{s}{S}t\right)^2\,,$$

který je samozřejmě platný pouze do času

$$t = 2\sqrt{2g}\frac{S}{s}\sqrt{H-h}\,.$$

Nyní známe výšku hladiny v zadaném čase. Z předchozí úlohy víme, že voda dostříkne do vzdálenosti

$$x = 2\sqrt{(y-h)\,h} = 2\sqrt{h}\left(\sqrt{H-h} - \sqrt{\frac{g}{2}}\frac{s}{S}t\right) = 2\sqrt{h}\left(\sqrt{H-h} - K\right)\,,$$

kde jsme několik parametrů úlohy schovali do konstanty K. Tento výraz chceme maximalizovat podle výšky otvoru h, a to znamená spočítat derivaci

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}h} = \frac{\sqrt{H-h}-K}{\sqrt{h}} - \frac{\sqrt{h}}{\sqrt{H-h}}\,,$$

kterou položíme rovnou nule. Po pár jdnoduchých úpravách dostaneme kvadratickou rovnici, jejíž řešením je

$$h = \frac{4H - K^2 \pm K\sqrt{8H+K^2}}{8}\,.$$

Všimněme si jedné důležité skutečnosti – v čase $t = 0$ platí $K = 0$, čímž bychom získali stejné řešení jako v předchozím případě. Vraťme se ale k výsledné rovnici. Pokud bychom zvolili kořen s $+$, potom by h vyšlo větší než v případě pro $t = 0$. Snadno nahlédneme, že h mělo vyjít menší, čili správně je kořen s $-$. Dosazením číselných hodnot dostaneme

$$h \doteq 11{,}7\,\mathrm{cm}\,,$$

což je stejně jako u numerického řešení. Analytické řešení uzavřené lahve ponecháváme čtenáři jako cvičení.

Výkon baterie

Nejdříve se zaměříme na situaci s rezistorem s odporem R a stejnosměrným proudem. Proud protékající obvodem bude

$$I = \frac{U_\mathrm{e}}{R_\mathrm{i} + R}\,.$$

Napětí se rozdělí na vnitřní odpor a na spotřebič. Konkrétně napětí na rezistoru bude

$$U = U_\mathrm{e}R = U_\mathrm{e}\frac{R}{R_\mathrm{i} + R}\,.$$

Výkon na spotřebiči je součin proudu a napětí na součástce

$$P = UI = \frac{R}{\left(R_\mathrm{i} + R\right)^2}U_\mathrm{e}^2\,.$$

Vidíme, že pro R blížící se k nule jde výkon také k nule. Stejně tak i pro velmi velký odpor R bude výkon téměř nulový. Maximum proto nastane pro nějakou konečnou hodnotu. V tomto případě budeme extrém hledat analyticky pomocí derivace. Zajímá nás maximum P v závislosti na R, tedy derivujeme

$$\frac{\mathrm{d}P}{\mathrm{d}R} = \frac{\left(R_\mathrm{i} + R\right)^2 - 2R\left(R_\mathrm{i} + R\right)}{\left(R_\mathrm{i} + R\right)^4}U_\mathrm{e}^2 = \frac{R_\mathrm{i} - R}{\left(R_\mathrm{i} + R\right)^3}U_\mathrm{e}^2\,.$$

Abychom nalezli extrém, položíme derivaci rovnou nule

$$\frac{\mathrm{d}P}{\mathrm{d}R} = 0 \qquad \Rightarrow \qquad R = R_\mathrm{i}\,.$$

Maximální výkon nastane pro odpor, který je stejný jako vnitřní odpor zdroje a bude mít hodnotu $P_\mathrm{max} = \frac{U_\mathrm{e}^2}{4R_\mathrm{i}}$.

Podívejme se na verzi úlohy se střídavým proudem. Budeme předpokládat, že prvky RLC jsou zapojeny sériově. Pak je velikost celkové impedance obvodu

$$Z = \sqrt{\left(R + R_\mathrm{i}\right)^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2}\,,$$

kde ω je úhlová frekvence proudu. Zajímá nás užitečný výkon na spotřebiči, tedy činný výkon $P = UI\cos\varphi$, kde $\cos\varphi$ je účinník. Ten určíme z fázového rozdílu, pro který platí

$$\mathrm{tg}\,\varphi = \frac{\omega L - \frac{1}{\omega C}}{R}\,.$$

Po troše práce zjistíme, že výsledek je stejný jako ve stejnosměrném případě. Pouze je potřeba doplnit podmínku pro vztah mezi kapacitou, indukčností a úhlovou frekvencí, a sice

$$\omega = \sqrt{\frac{1}{LC}}\,.$$

S touto podmínkou je účinník rovný 1, tedy maximální možné hodnotě, a obvod se, co se výkonu týká, chová jako rezistor.

Jádra dusíku

Normální podmínky odpovídají tlaku $p_0 = 10^5\,\mathrm{Pa}$ a teplotě $t = 0\,{}^\circ\mathrm{C}$, resp. $T = 273{,}15\,\mathrm{K}$. Střední kvadratická rychlost částice v plynu, kterou si můžeme najít v tabulkách, je

$$v_\mathrm{k} = \sqrt{\frac{3kT}{m_0}}\,,$$

kde $k = 1{,}38 \cdot 10^{-23}\,\mathrm{J{\cdot}K^{-1}}$ je Boltzmannova konstanta a m_0 je hmotnost částice. Ta byla zadána tím, že jde o atomární dusík 14, tedy $m_0 = 2{,}33 \cdot 10^{-26}\,\mathrm{kg}$. Rychlost obou částic bude $v \doteq 700\,\mathrm{m{\cdot}s^{-1}}$.

Pokud by někdo vzal molekulu dusíku, pak by hmotnost byla dvojnásobná a rychlost molekuly nižší. Zadána byla ale úmyslně pouze jádra, aby byla další část úlohy jednoznačnější. Když máme jádra, tak je můžeme brát daleko snadněji jako bodové náboje. Molekuly jsou složitější tím, že je v nich přítomno více jader a může pak záležet i na orientaci. Také bylo v zadání uvedeno pouze jádro, abychom nemuseli uvažovat elektronový obal.

Dusík má atomové číslo 7, takže náboj každého jádra je $Q = 7e$, kde vystupuje elementární náboj $e = 1{,}602 \cdot 10^{-19}\,\mathrm{C}$. Pokud chceme jádra dostat k sobě co nejblíže, pak je pošleme proti sobě čelně. Rychlost, kterou jsme již určili, mají ale někde ve velké (nekonečné) vzdálenosti od sebe a jak se začnou přibližovat, rychlost se začne snižovat, protože na sebe jádra působí odpudivou elektrostatickou silou. Gravitační přitažlivá síla je v tomto případě vůči té elektrostatické zcela zanedbatelná. Otázkou je, kdy se všechna kinetická energie přemění na potenciální elektrostatickou, kterou můžeme v závislosti na vzdálenosti r vyjádřit jako

$$E_\mathrm{p} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q^2}{r} = \frac{49e^2}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{r}\,,$$

kde $\varepsilon_0 = 8{,}854 \cdot 10^{-12}\,\mathrm{F{\cdot}m^{-1}}$ je permitivita vakua. Předpokládáme-li, že obě jádra měla v nekonečnu stejnou rychlost, můžeme psát

$$\frac{49e^2}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{r} = E_\mathrm{p} = 2E_\mathrm{k} = 2\frac{1}{2}m_0 v_\mathrm{k}^2\,,$$

$$r = \frac{49e^2}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{3kT} \doteq 1{,}00 \cdot 10^{-6}\,\mathrm{m}\,.$$

Je dobré si všimnout, že hmotnost částice ani nepotřebujeme znát, pouze teplotu – hmotnost jsme použili pouze pro mezivýpočet rychlosti částic. Vidíme, že zjednodušeními, která jsme provedli, jsme získali situaci, která se ani zdaleka neblíží běžné situaci v plynu, který dýcháme. Zde jsou molekuly k sobě mnohem blíže než $1\,\mu\mathrm{m}$. Je to dáno zejména tím, že jsme uvažovali zcela ionizovaný plyn, zatímco ve vzduchu kolem nás jsou neutrální molekuly. Ve vzdálenostech výrazně větších než je poloměr atomu, řádově $10 \cdot 10^{-10}\,\mathrm{m}$, se atom zvnějšku obvykle chová neutrálně a odpudivá elektromagnetická síla se projeví až ve větší blízkosti. V běžném neionizovaném plynu se tedy atomy dostávají daleko blíže k sobě, což je nutné i kvůli tomu, kolik jader se obvykle vejde do jednotkového objemu vzduchu. Kvůli silnému odpuzování jader elektromagnetickou silou je také tak těžké přimět je k jaderné fúzi.

Teplota děje v plynu

Máme zadaný děj v plynu

$$p = p_0 \mathrm{e}^{-\alpha V} \, .$$

Plyn považujeme za ideální a můžeme tedy psát

$$pV = nRT \, ,$$

kde n je látkové množství plynu, $R = 8{,}31\,\mathrm{J{\cdot}K^{-1}{\cdot}mol^{-1}}$ je molární plynová konstanta a T je jeho teplota. Vyjádříme si teplotu jako funkci ostatních veličin

$$T = \frac{pV}{nR} = \frac{p_0 V}{nR} \mathrm{e}^{-\alpha V} \, .$$

Teplota je nyní vyjádřena pomocí objemu, který je proměnný, a dalších konstant, které jsou pro uzavřený systém konstantní. Podobně jako u výkonu rezistoru, vidíme, že pro nulový objem a nekonečně velký objem by byla teplota nulová. Zderivujeme teplotu podle objemu

$$\frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}V} = \frac{p_0}{nR} \mathrm{e}^{-\alpha V} \left(1 - \alpha V\right) \, .$$

Nyní položíme derivaci rovnou nule. Pouze poslední člen součinu může být nulový, čili pro extrém platí

$$1 - \alpha V = 0 \qquad \Rightarrow \qquad V = \frac{1}{\alpha} \, .$$

Maximální teploty $T_{\max} = \frac{p_0}{\alpha n R \mathrm{e}}$ dosáhne plyn pro objem $V = \frac{1}{\alpha}$.

Karel Kolář
karel@fykos.cz

Fyzikální korespondenční seminář je organizován studenty MFF UK. Je zastřešen Oddělením propagace a mediální komunikace MFF UK a podporován Ústavem teoretické fyziky MFF UK, jeho zaměstnanci a Jednotou českých matematiků a fyziků.