

Úloha V.4 . . . podivná smyčka

7 bodů; průměr 1,60; řešilo 30 studentů

Kruhová kovová smyčka s poloměrem $r = 15$ cm má hmotnost $m = 18$ g. Pokud bychom ji rozstříhli, vznikl by drát s odporem $R = 3,5$ m Ω . Na počátku je smyčka v klidu. V čase $t = 0$ zapneme homogenní magnetické pole kolmé k rovině smyčky s časovým průběhem $B(t) = \alpha t$, kde $\alpha = 1$ mT \cdot s $^{-1}$ je konstanta. Smyčka se v důsledku přítomnosti nestacionárního magnetického pole začne nepatrně otáčet kolem své osy. Určete velikost úhlové rychlosti ω v čase $t = 0,1$ s. Deformaci smyčky neuvažujte. *Vašek se rád zabývá bizarními jevy.*

Úloha je obtížná především tím, že není na první pohled zřejmý mechanismus roztáčení smyčky. Podle Faradayova zákona elektromagnetické indukce se ve smyčce indukuje elektrický proud, který je realizován tokem elektronů nesoucích záporný náboj. Tok těchto elektronů má vůči ose smyčky nenulový moment hybnosti. Vzhledem k tomu, že výsledný moment síly elektromagnetického pole od zdroje působící na smyčku vůči její ose je nulový, zachovává se nulová hodnota celkového momentu hybnosti smyčky vůči její ose. Nenulový moment hybnosti vodivostních elektronů je proto kompenzován momentem hybnosti smyčky, což znamená, že se smyčka začne otáčet.

Přesvědčme se, že je výsledný moment síly elektromagnetického pole od zdroje působící na smyčku vůči její ose nulový. Nestacionární magnetické pole zdroje generuje elektrické pole, které se na smyčce projeví jako indukované napětí, což vyplývá z Faradayova zákona elektromagnetické indukce. Toto elektrické pole má nenulovou tangenciální složku, a proto na nabitě částice smyčky bude působit nenulový moment síly. V elektricky neutrální smyčce je však stejné množství záporného a kladného náboje, které jsou makroskopicky stejně prostově rozloženy. Moment síly elektrického pole zdroje je nulový. Jakmile smyčkou začne protékat elektrický proud, působí na smyčku v daném místě magnetická síla kolmá na směr elektrického proudu a na směr magnetické pole. Magnetická síla je proto v daném místě radiální a dává nulový příspěvek k silovému momentu. Efekt magnetické síly se vyruší až pro celou smyčku, neboť na opačných stranách smyčky má magnetická síla opačnou orientaci. Poznamenejme na tomto místě, že magnetická síla, která je v daném místě smyčky radiální, má snahu smyčku deformovat, a to tak, že změní její poloměr. Tento efekt je i v naší úloze zanedbatelný.

Nyní provedeme výpočet. Podle Faradayova zákona elektromagnetické indukce se na smyčce indukuje elektrické napětí U dané časovou změnou toku Φ magnetického pole smyčkou o velikosti

$$U = \frac{d\Phi}{dt} = S \frac{dB}{dt}, \quad (1)$$

kde S je plocha části roviny ohraničené smyčkou. Tímto napětím U rozumíme změnu elektrického potenciálu při jednom oběhu smyčky. Podle Ohmova zákona bude smyčkou procházet elektrický proud

$$I = \frac{U}{R}. \quad (2)$$

Označme N počet volných (vodivostních) elektronů ve smyčce. Proud I je roven velikosti náboje, který proteče průřezem smyčky za jednotku času, neboli

$$I = \frac{dq}{dt} = \frac{Nev}{l}, \quad (3)$$

kde e je elementární náboj, v je driftová (střední) rychlost elektronů tvořících elektrický proud a l značí délku smyčky (její obvod). Dosazením elektrického proudu I (rovnice (3)) do Ohmova zákona (rovnice (2)) a úpravou dostaneme vztah pro napětí U ,

$$U = \frac{NRev}{l}. \quad (4)$$

Srovnáním napětí ze vztahu (1) se vztahem (4) a opět jednoduchou úpravou dostáváme rovnost

$$Nv = \frac{Sl}{Re} \frac{dB}{dt}. \quad (5)$$

Velikost momentu hybnosti L vodivostních elektronů ve smyčce je rovna

$$L = Nm_evr,$$

kde m_e je hmotnost elektronu. Po dosazení z rovnice (5) dostáváme

$$L = \frac{Slm_e r}{Re} \frac{dB}{dt}.$$

Na smyčku působí nulový výsledný moment síly, a proto se celkový moment hybnosti zachovává. Na počátku byl moment hybnosti smyčky vzhledem k ose smyčky nulový, a proto je moment hybnosti vodivostních elektronů kompenzován stejně velkým, opačně orientovaným momentem hybnosti otáčející se smyčky. Velikost momentu hybnosti L' smyčky je rovna

$$L' = m\omega r^2.$$

Srovnáním velikosti momentu hybnosti smyčky a vodivostních elektronů vzhledem k ose smyčky dostáváme rovnost

$$\frac{Slm_e r}{Re} \frac{dB}{dt} = m\omega r^2.$$

Odtud pro velikost úhlové rychlosti ω platí

$$\omega = \frac{Slm_e}{mRe r} \frac{dB}{dt}.$$

Časová změna proudu je v našem případě rovna

$$\frac{dB}{dt} = \frac{d(\alpha t)}{dt} = \alpha.$$

Plocha S je rovna $S = \pi r^2$ a délka l smyčky je rovna $l = 2\pi r$. Pro velikost úhlové rychlosti v libovolném čase (a tedy i v čase $t = 0,1$ s) dostáváme vztah

$$\omega = \frac{2\pi^2 r^2 \alpha m_e}{mRe}.$$

Po číselném dosazení hodnot ze zadání a fyzikálních konstant dostáváme číselný výsledek

$$\omega = 4,0 \cdot 10^{-11} \text{ s}^{-1}.$$

Uvědomme si ještě, že při výpočtu jsme zanedbali elektrický proud tvořený otáčením kladně nabitě smyčky. Tento proud je však vzhledem k poměru hmotnosti smyčky a vodivostních elektronů asi o 4 řády menší než proud elektronů.

Dodejme ještě poznámku pro pokročilé. Tvrzení na začátku řešení o zachování momentu hybnosti smyčky není správně odůvodněno. Vysvětlíme proč. Samotné elektromagnetické pole nese hybnost (v teorii elektromagnetismu se používá hustota hybnosti elektromagnetického pole v daném místě), a proto má také moment hybnosti vzhledem ke vztážené ose. Potom to, co se v naší úloze ve skutečnosti zachovává, je celkový moment hybnosti smyčky a elektromagnetického pole generovaného proudem ve smyčce. Z výpočtu výše plyne, že elektrický proud je v naší úloze konstantní. Tomu odpovídá stacionární magnetické pole, které negeneruje netriviální elektrické pole. A až fakt, že samotné magnetické pole bez pole elektrického má nulovou hybnost, nás ospravedlňuje tvrdit, že je moment hybnosti smyčky konstantní.

Václav Mikeska
v.mikeska@fykos.cz

Fyzikální korespondenční seminář je organizován studenty MFF UK. Je zastřešen Oddělením propagace a mediální komunikace MFF UK a podporován Ústavem teoretické fyziky MFF UK, jeho zaměstnanci a Jednotou českých matematiků a fyziků.

Toto dílo je šířeno pod licencí Creative Commons Attribution-Share Alike 3.0 Unported.
Pro zobrazení kopie této licence navštivte <http://creativecommons.org/licenses/by-sa/3.0/>.