Úloha IV.5 ... zkratka napříč časem

9 bodů; průměr 4,48; řešilo 54 studentů

Jáchym se nachází v dvoudimenzionálním kartézském prostoru v bodě $J = (-2a, 0)$. Chce se co nejrychleji dostat do bodu $T = (2a, 0)$, který se (naštěstí) nachází ve stejném prostoru. Jáchym se zásadně pohybuje rychlostí o velikosti v. Aby to nebylo tak jednoduché, prostorem vede pojízdný pás ve tvaru přímky, procházející body $(-3a, 0)$ a $(0, a)$, po kterém se Jáchym pohybuje celkovou rychlostí kv. Pro jaké minimální $k \geq 1$ se Jáchymovi vyplatí jít po pásu?

Jáchym, ze života.

Nejdříve spočítáme čas, za který Jáchym přejde přes pás. Nejrychlejší cesta bude mít zřejmě tři části – z bodu J na pás (průsečík prvního úseku dráhy a pásu označíme J'), kousek po pásu (až do bodu T') a nakonec z pásu do bodu T.

Označme $x_0 = -3a$ a $y_0 = a$, což jsou body, ve kterých pás protíná osu x, resp. y. Pro úhel mezi pásem a osou x platí

$$\operatorname{tg}\varphi = -\frac{y_0}{x_0}\,. \tag{1}$$

Z bodů J a T povedeme na přímku danou pásem kolmice, jejich délka nechť je po řadě d_1 a d_2. Od místa průsečíků kolmic a přímky vyznačíme vzdálenosti l_1, resp. l_2 do bodů J', resp. T', viz obrázek 1. Spojnici J a J' nazveme dráha s_1, stejně tak spojnici T a T' označíme s_2. Z Pythagorovy věty máme $s_{1,2}^2 = d_{1,2}^2 + l_{1,2}^2$.

Nyní odvodíme podmínku pro nejkratší čas. Představme si, že Jáchym jde z bodu J do bodu P na pásu, který se nachází ve vzdálenosti p průsečíku kolmice d_1 a pásu. Nejdříve tedy ujde vzdálenost s_1 rychlostí v, potom ujde vzdálenost $p - l_1$ rychlostí kv. Celkový čas bude

$$t = \frac{s_1}{v} + \frac{p - l_1}{kv} = \frac{1}{v}\left(s_1 + \frac{p - l_1}{k}\right).$$

Za s_1 si dosadíme z Pythagorovy věty výše, čímž dostaneme závislost času na l_1. Zbylé parametry (d_1 a p) jsou konstanty. Minimum času najdeme položením derivace rovné nule

$$\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}l_1} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}l_1}\left(\frac{1}{v}\left(\sqrt{d_1^2 + l_1^2} + \frac{p - l_1}{k}\right)\right) = \frac{1}{v}\left(\frac{l_1}{\sqrt{d_1^2 + l_1^2}} - \frac{1}{k}\right) = 0\,.$$

Řešením této rovnice dostaneme podmínku $d_1 = l_1\sqrt{k^2 - 1}$, která zřejmě bude platit i pro d_2 a l_2. Všimněme si, že konstanta p může být libovolná za předpokladu, že l_1 vyjde menší. Opětovným dosazením do Pythagorovy věty odvodíme vztah $s_{1,2} = kl_{1,2}$.

Celkový čas cesty je

$$t = \frac{s_1 + s_2}{v} + \frac{l - (l_1 + l_2)}{kv} = \frac{1}{kv}\left((d_1 + d_2)\sqrt{k^2 - 1} + l\right),$$

kde l je vzdálenost na přímce od jedné kolmice k druhé, tedy $l = 4a\cos\varphi$. Z podobnosti trojúhelníků vyplývá

$$d_2 - d_1 = l\operatorname{tg}\varphi\,,$$

$$d_1 = -\frac{x_0 + 2a}{4a} l\operatorname{tg}\varphi\,,$$

což vede na

$$d_1 + d_2 = -\frac{x_0}{2a} l\operatorname{tg}\varphi\,.$$

Dosazením do rovnice výše dostáváme

$$t = \frac{4a}{v}\frac{\cos\varphi}{k}\left(1 - \frac{x_0}{2a}\operatorname{tg}\varphi\sqrt{k^2-1}\right) .$$

Podíl $4a$ a v je zřejmě čas, který by Jáchymovi trvala cesta bez pásu. Pro mezní čas, při kterém se mu ještě vyplatí jít přes pás, platí

$$1 = \frac{\cos\varphi}{k}\left(1 - \frac{x_0}{2a}\operatorname{tg}\varphi\sqrt{k^2-1}\right) .$$

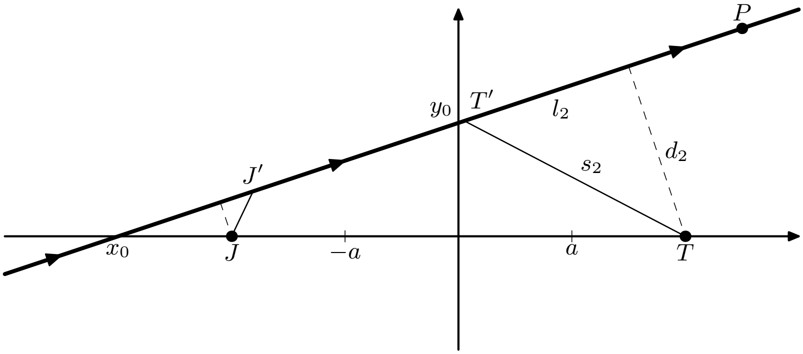
Ještě použijeme identitu $\cos x = \left(\operatorname{tg}^2 x + 1\right)^{-\frac{1}{2}}$, za $\operatorname{tg}\varphi = \frac{1}{3}$ dosadíme z rovnice (1), kde $x_0 = -3$ a $y_0 = 1$, čímž získáme kvadratickou rovnici

$$31k^2 - 24k\sqrt{10} + 45 = 0 .$$

Tato kvadratická rovnice má dvě řešení, konkrétně

$$k = \frac{12\sqrt{10} \pm 3\sqrt{5}}{31} .$$

Ještě musíme ověřit, že dráhy budou skutečně vypadat tak, jak jsme předpokládali. Zpětným dosazením zjistíme, že vyhovuje pouze kořen s $+$, tedy $k \doteq 1,44$.



Obr. 1: Jáchymova cesta pro $k = 1{,}44$

Jáchym Bártík
`tuaki@fykos.cz`

Fyzikální korespondenční seminář je organizován studenty MFF UK. Je zastřešen Oddělením propagace a mediální komunikace MFF UK a podporován Ústavem teoretické fyziky MFF UK, jeho zaměstnanci a Jednotou českých matematiků a fyziků.