

Úloha IV.4 ... optický fykosák

8 bodů; průměr 6,00; řešilo 26 studentů

Pták Fykosák našel na Matfyzu nehlídanou optickou lavici, která umožňuje rozmístit různé pomůcky podél optické osy, a začal si s ní hrát. Na osu umístil postupně bodový zdroj světla, první čočku, druhou čočku a stínítko se stejnými rozestupy (vzdálenost stínítka od zdroje je tedy třikrát větší než vzdálenost jakýchkoli dvou sousedních pomůcek). Na stínítku se vytvořil ostrý obraz zdroje. Fykosák potom celou soustavu ponořil do neznámé kapaliny, kterou našel v podivném kanystru. K jeho úžasu zůstal obraz na stínítku stále ostrý. Určete index lomu této kapaliny, jenž je určitě jiný než index lomu vzduchu, který můžete považovat za jednotkový. Jedna z čoček má desetkrát větší ohniskovou vzdálenost než druhá a obě jsou tenké a vyrobené z materiálu o indexu lomu 2.

Matěj si rád hraje s cizími věcmi.

Obraz vytvořený na stínítku je skutečný (jinak by nemohl být zachycen na stínítku). To znamená, že můžeme zdroj a stínítko prohodit a dostaneme ostrý obraz (světlo se šíří stejně oběma směry). Bez újmy na obecnosti tedy předpokládáme, že první čočka má ohniskovou vzdálenost f desetkrát menší než druhá ($10f$). Vzdálenost jednotlivých součástek budeme značit h . Vzdálenost místa, kam zobrazí zdroj první čočka, od první čočky označme s_1 a vzdálenost tohoto „meziobrazu“ od druhé čočky s_2 . Znaménková konvence bude taková, aby s_1 bylo kladné, pokud obraz vznikne za první čočkou, zatímco s_2 bude kladné pro obraz před druhou čočkou. Musí platit

$$s_1 + s_2 = h. \quad (1)$$

Zároveň si můžeme napsat obě zobrazovací rovnice. První čočka zobrazí zdroj ze vzdálenosti h před čočkou do vzdálenosti s_1 . Druhá čočka zobrazí obraz zdroje ze vzdálenosti s_2 do vzdálenosti h za čočkou. To zapíšeme jako

$$\frac{1}{f} = \frac{1}{h} + \frac{1}{s_1}, \quad (2)$$

$$\frac{1}{10f} = \frac{1}{h} + \frac{1}{s_2}. \quad (3)$$

Máme celkem tři rovnice (1), (2) a (3), ze kterých po několika algebraických úpravách dostaneme kvadratickou rovnici

$$\begin{aligned} 0 &= 30f^2 - 22hf + h^2, \\ f &= \frac{11 \pm \sqrt{91}}{30}h. \end{aligned} \quad (4)$$

Dvě možná řešení pro velikost ohniskových vzdáleností čoček odpovídají dvěma možným indexům lomu vzduchu a neznámé kapaliny. Rovnice tenké čočky je

$$\frac{1}{f} = \left(\frac{n_c}{n_p} - 1 \right) \left(\frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2} \right),$$

kde $n_c = 2$ je index lomu čočky, n_p je index lomu okolního prostředí a r_1 a r_2 jsou poloměry křivosti čočky. Jelikož n_c , r_1 a r_2 jsou pro obě čočky v průběhu experimentu konstantní, můžeme psát

$$f = \frac{K}{\frac{n_c}{n_p} - 1}, \quad (5)$$

kde K je nějaká konstanta. Dále označíme indexy lomu hledané kapaliny n_k a vzduchu $n_v \approx 1$. Teď si můžeme uvědomit, že poměr ohniskových vzdáleností je 10 i v kapalině, protože čočky mají stejné indexy lomu. K rovnici (4) jsme došli pouze pomocí tohoto předpokladu, proto jedno řešení pro f musí odpovídat ohniskové vzdálenosti první čočky v kapalině a druhé řešení její ohniskové vzdálenosti ve vzduchu - označme je f_k a f_v . Jelikož ohniskové vzdálenosti obou čoček mají stejné znaménko, musí se jednat o spojky, a nikoliv o rozptylky (jinak by nemohly vytvořit skutečný obraz za soustavou). Ohnisková vzdálenost spojky je kladná, takže z rovnice (5) vyplývá $f_k > f_v$. K hodnotám f_k a f_v tak můžeme přiřadit jednotlivé kořeny z (4)

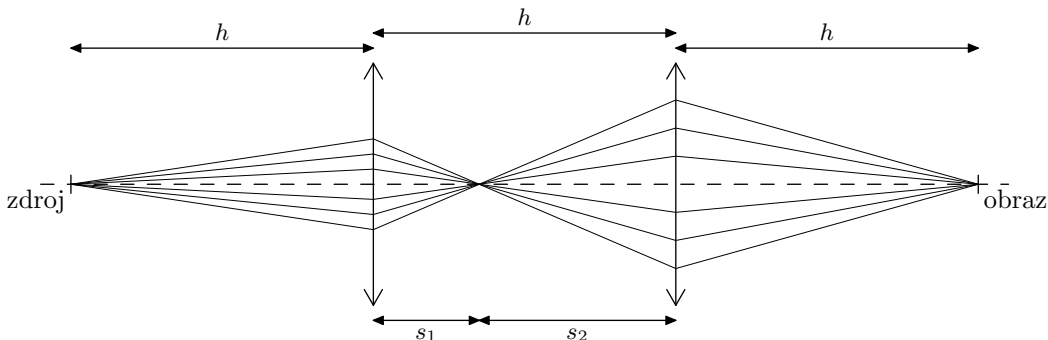
$$f_k = \frac{11 + \sqrt{91}}{30} h, \quad f_v = \frac{11 - \sqrt{91}}{30} h.$$

Z rovnice (5) pro f_k si vyjádříme konstantu K , kterou dosadíme do vztahu pro f_v . Odtud si vyjádříme poměr f_k/f_v , za který dosadíme z předchozí rovnice. Po několika drobných úpravách dostáváme

$$\frac{\frac{n_c}{n_v} - 1}{\frac{n_c}{n_k} - 1} = \frac{f_k}{f_v} = \frac{11 + \sqrt{91}}{11 - \sqrt{91}}.$$

Nyní už stačí jen vyjádřit hledaný index lomu neznámé kapaliny

$$n_k = \left(\frac{11 - \sqrt{91}}{11 + \sqrt{91}} \left(\frac{n_c}{n_v} - 1 \right) + 1 \right)^{-1} n_c \doteq 1,87.$$



Obr. 1: Schéma optické soustavy.

Matěj Mezera
m.mezera@fykos.cz

Fyzikální korespondenční seminář je organizován studenty MFF UK. Je zastřešen Oddělením propagace a mediální komunikace MFF UK a podporován Ústavem teoretické fyziky MFF UK, jeho zaměstnanci a Jednotou českých matematiků a fyziků.

Toto dílo je šířeno pod licencí Creative Commons Attribution-Share Alike 3.0 Unported. Pro zobrazení kopie této licence navštivte <http://creativecommons.org/licenses/by-sa/3.0/>.