Úloha III.S ... vzduchová pistole podrobně

10 bodů; průměr 6,55; řešilo 66 studentů

Máme vzduchovou pistoli o hmotnosti $M = 1{,}3\,\mathrm{kg}$. Vystřelíme z ní diabolku (náboj), která má hmotnost $m = 0{,}50\,\mathrm{g}$ a průměr $d = 4{,}5\,\mathrm{mm}$.

1. *Jakou kinetickou energii bude mít náboj po výstřelu, když podle technické specifikace dosáhne rychlosti $v = 250\,\mathrm{fps}$ (tedy 250 stop za sekundu)?*
2. *Jaký bude zpětný ráz pistole? Zajímá nás jak rychlost, kterou by se zbraň pohybovala, kdyby nebyla upevněná, tak její hybnost.*
3. *Jak se změní moment hybnosti Země, pokud vystřelíme ze zbraně rovnoběžně se zemským povrchem? Zajímají nás okamžiky, kdy měla maximální hybnost a potom, když dopadla a zcela se zastavila. Pro jednoduchost uvažujte, že zbraň je pevně spojená se Zemí (která je zcela kulatá) a že zbraň při výstřelu nezačala rotovat. Jakou úhlovou rychlost Země získá či ztratí?*
4. *Jaký je spodní odhad maximálního zrychlení střely, pokud se náboj v první čtvrtině hlavně urychlí na 90 % maximální rychlosti? Vnitřní délka hlavně je $D = 18\,\mathrm{cm}$.*
5. *Náboj jsme vstřelili do kousku plastelíny o hmotnosti $m_\mathrm{p} = 42\,\mathrm{g}$, který je zavěšený na tenkém provázku délky $l = 48\,\mathrm{cm}$. Pokud by náboj v plastelíně uvízl, jaká by byla maximální úhlová výchylka tohoto kyvadla?*
6. *Může náboj při nárazu na lidskou pokožku překročit hodnotu plošné dopadové energie $Q_\mathrm{max} = 50\,\mathrm{J\cdot cm^{-2}}$?*

Bonus Nakonec se nám experiment s kyvadlem nepodařil a plastelínu jsme prostřelili. Naměřili jsme poloviční výchylku kyvadla, než jsme původně očekávali. Jaká byla výstupní rychlost náboje z plastelíny? Předpokládejte, že při průchodu plastelínou náboj nezmění směr a ani nic z plastelíny neodnese s sebou.

Karel chtěl hlouběji rozebrat standardní úlohu.

Kinetická energie

Nejprve převedeme rychlost na základní jednotky. Jedna stopa má dle definice 30,42 cm. Hodnota 250 fps tedy odpovídá rychlosti $v = 76{,}2\,\mathrm{m\cdot s^{-1}}$. Kinetickou energii pak snadno vypočteme jako

$$E_\mathrm{k} = \frac{1}{2}mv^2 \doteq 1{,}45\,\mathrm{J}\,.$$

Energie střely je maximálně 1,5 J, což je odpověď na první otázku. Takovou vzduchovku si můžete v České republice pořídit i bez zbrojního pasu.

Zpětný ráz

Další otázka se týká zpětného rázu. Hybnost, kterou získá kulka, je

$$p = mv \doteq 0{,}038\,\mathrm{kg\cdot m\cdot s^{-1}}\,.$$

Stejnou hybnost, pouze opačného směru, získá i zbraň. To vyplývá ze zákonu zachování hybnosti. Z toho můžeme určit velikost rychlosti zbraně V, pokud by byla volná

$$p = mv = MV \qquad \Rightarrow \qquad V = \frac{m}{M}v \doteq 0{,}029\,\mathrm{m\cdot s^{-1}}\,.$$

Zpětný ráz vzduchové pistole je tedy zhruba $3\,\mathrm{cm\cdot s^{-1}}$ opačného směru, než vyletí náboj.

Moment hybnosti Země

Při počítání momentu je zcela zásadní rozhodnout se, vůči jaké ose ho chceme určit. Jelikož nás zajímá změna rychlosti rotace Země, dává smysl jej počítat vůči ose procházející zemským těžištěm. Hybnost p, kterou jsme spočítali výše, je kolmá na poloměr Země $R_\mathrm{Z} = 6\,378\,\mathrm{km}$. Změna momentu hybnosti potom bude

$$L = pR_\mathrm{Z} = mvR_\mathrm{Z} \doteq 2{,}4 \cdot 10^5\,\mathrm{kg{\cdot}m^2{\cdot}s^{-1}}\,.$$

To vypadá jako docela vysoká hodnota. Podívejme se však, jaké úhlové rychlosti rotace Země to odpovídá. Moment setrvačnosti zeměkoule s hmotností $M_\mathrm{Z} = 5{,}97 \cdot 10^{24}\,\mathrm{kg}$ je

$$J_\mathrm{Z} = 2M_\mathrm{Z}R_\mathrm{Z}^2/5\,.$$

Maximální úhlová rychlost, kterou Země získá či ztratí, bude

$$\omega = \frac{L}{J_\mathrm{Z}} = \frac{5mvR_\mathrm{Z}}{2M_\mathrm{Z}R_\mathrm{Z}^2} = \frac{5mv}{2M_\mathrm{Z}R_\mathrm{Z}} \doteq 2{,}5 \cdot 10^{-33}\,\mathrm{s^{-1}}\,.$$

Tato hodnota je tak nízká, že by se těleso s touto úhlovou rychlostí neotočilo ani jednou od vzniku vesmíru.

Urychlení střely

Dráha, na které se má náboj urychlit, je $D/4$. Za tu dobu má nabrat rychlost $0{,}90v$. Aby bylo zrychlení minimální, musí být zároveň konstantní. Pokud by nebylo, pro dosažení stejné rychlosti by muselo být nějakou chvíli vyšší.

Dobu urychlování si označme jako t. Pak můžeme psát, že pro dráhu platí $D/4 = at^2/2$ a pro rychlost $0{,}90v = at$, kde a je hledané rovnoměrné zrychlení. Dosazením jedné rovnice do druhé dostáváme

$$t = \frac{D}{1{,}8v} \doteq 1{,}3\,\mathrm{ms}\,,$$

$$a = \frac{1{,}62v^2}{D} \doteq 5{,}2 \cdot 10^4\,\mathrm{m{\cdot}s^{-2}}\,.$$

Pokud bychom uvažovali, že se jedná o rovnoměrně zrychlený pohyb, pak by se náboj urychloval po dobu $1{,}3\,\mathrm{ms}$ zrychlením $52\,\mathrm{km{\cdot}s^{-2}}$. Ve skutečnosti je však zrychlení značně nerovnoměrné a proto bude jeho maximální hodnota v průběhu výstřelu značně vyšší.

Plastelínové kyvadlo

Nejprve dojde ke vstřelení náboje do plastelíny, což můžeme považovat za dokonale nepružnou srážku. Při ní se zachovává pouze hybnost a část kinetické energie se přemění na jiné formy energie. Označíme-li rychlost spojené střely a plastelíny po srážce jako w, bude platit

$$mv = (m + m_\mathrm{p})\,w \qquad \Rightarrow \qquad w = \frac{m}{m + m_\mathrm{p}}v \doteq 0{,}90\,\mathrm{m{\cdot}s^{-1}}\,.$$

Kinetická energie kyvadla se potom bude postupně přeměňovat na potenciální energii dle zákona zachování mechanické energie. Kyvadlo vystoupí o h výše v tíhovém poli s tíhovým zrychlením g. Dostáváme

$$\frac{1}{2}\,(m + m_\mathrm{p})\,w^2 = (m + m_\mathrm{p})\,gh \qquad \Rightarrow \qquad h = \frac{w^2}{2g} = \frac{m^2v^2}{2g\,(m + m_\mathrm{p})^2} \doteq 4{,}1\,\mathrm{cm}\,.$$

Výšku výstupu pak můžeme pomocí pravoúhlého trojúhelníku převést na úhel

$$\alpha = \arccos\left(\frac{l-h}{l}\right) = \arccos\left(1 - \frac{m^2v^2}{2gl\left(m+m_\mathrm{p}\right)^2}\right) \doteq 0{,}416\,\mathrm{rad} \doteq 23{,}8^\circ\,.$$

Kyvadlo by se po vstřelení náboje mělo vychýlit o 23,8°. Poznamenejme, že jsme zanedbali hmotnost závěsu a že jsme kyvadlo považovali za hmotný bod.

Nyní se podívejme na zajímavější variantu, kterou se zabýval bonus. S plastelínou jsme to nějak nedomysleli a podařilo se nám ji prostřelit. Pro nový rozdíl výšek platí

$$h_2 = l\left(1 - \cos\frac{\alpha}{2}\right)\,.$$

Nyní využijeme identitu

$$\cos\frac{x}{2} = \sqrt{\frac{1+\cos x}{2}}$$

a dostaneme

$$h_2 = l\left(1 - \sqrt{\frac{1+\cos\alpha}{2}}\right) = l\left(1 - \sqrt{1 - \frac{h}{2l}}\right)\,.$$

Dosadíme vstupní veličiny

$$h_2 = l\left(1 - \sqrt{1 - \frac{m^2v^2}{4gl\left(m+m_\mathrm{p}\right)^2}}\right) \doteq 1{,}0\,\mathrm{cm}\,.$$

Do této výšky vystoupí pouze plastelína – tentokrát již ne s nábojem. Ze zákona zachování mechanické energie vyplývá

$$m_\mathrm{p} g h_2 = \frac{1}{2} m_\mathrm{p} w_2^2\,,$$

kde w_2 je rychlost, kterou plastelína získala po prostřelení nábojem. Platí pro ni

$$w_2 = \sqrt{2gh_2} = \sqrt{2gl}\left(1 - \sqrt{1 - \frac{m^2v^2}{4gl\left(m+m_\mathrm{p}\right)^2}}\right)^{\frac{1}{2}} \doteq 0{,}45\,\mathrm{m{\cdot}s^{-1}}\,.$$

Hybnost, která byla odebrána střele, je $p_2 = m_\mathrm{p} w_2$. Rozdíl hybností bude

$$m v_2 = m v - m_\mathrm{p} w_2\,.$$

Z něj už snadno určíme výstupní rychlost náboje

$$v_2 = v - \frac{m_\mathrm{p}}{m} w_2 = v - \frac{m_\mathrm{p}}{m}\sqrt{2gl}\left(1 - \sqrt{1 - \frac{m^2v^2}{4gl\left(m+m_\mathrm{p}\right)^2}}\right)^{\frac{1}{2}} \doteq 38\,\mathrm{m{\cdot}s^{-1}}\,.$$

Tato hodnota je zhruba poloviční vůči maximální. Je ovšem vidět, že závislost je složitější. Pro jiné uspořádání tak nejspíš nebude platit, že poloviční úhel odpovídá zhruba poloviční rychlosti.

Nebezpečnost zbraně

Hodnoty dopadové energie střely vyšší než $Q_{\mathrm{max}} = 50\,\mathrm{J{\cdot}cm^{-2}}$ považují soudní znalci za odpovídající potenciálnímu smrtelnému účinku. Proto jsme se ptali právě na tuto hranici. Jedná se o energii dopadající střely vydělenou jejím průřezem. Ten považujeme za kruhový s plochou $S = \pi d^2/4$. Maximální energii dostaneme z maximální rychlosti střely

$$Q = \frac{E_\mathrm{k}}{S} = \frac{2mv^2}{\pi d^2} \doteq 9{,}1 \cdot 10^4\,\mathrm{J{\cdot}m^{-2}}\,.$$

Pokud převedeme plošnou energii na stejnou jednotku, dostáváme $9{,}1\,\mathrm{J{\cdot}cm^{-2}}$. Tato vzduchová pistole se do limitu Q_{max} vejde. Mohli byste ale mít vzduchovou pušku, která vystřeluje 3,2krát rychlejší náboje, pro kterou stále nemusíte mít zbrojní pas, protože se vejde do 16 J. Při stejné velikosti a hmotnosti nábojů by pak ale dosáhla $100\,\mathrm{J{\cdot}cm^{-2}}$. Takže byste potenciálně měli problém u soudu s vysvětlováním toho, že jde o malý náboj, který obvykle kůži neprotrhne.

Karel Kolář
`karel@fykos.cz`

Fyzikální korespondenční seminář je organizován studenty MFF UK. Je zastřešen Oddělením propagace a mediální komunikace MFF UK a podporován Ústavem teoretické fyziky MFF UK, jeho zaměstnanci a Jednotou českých matematiků a fyziků.