Úloha I.5 ... obecně relativistická

9 bodů; průměr 7,30; řešilo 69 studentů

Starman se před odletem do kosmu na cestu k Marsu ve svém voze Tesla Roadster domluvil s Muskem, že jakmile bude ve vzdálenosti $r = 5{,}0 \cdot 10^6\,\mathrm{km}$ od hmotného středu Země, tak na něj Musk zasvítí výkonným zeleným laserem. Vlnová délka laseru se vlivem gravitačního pole Země zvětší. Porovnejte tuto změnu vlnové délky s vlivem elektromagnetického Dopplerova jevu, vzdaluje-li se Starman od Muska rychlostí $v = 4{,}0\,\mathrm{km{\cdot}s^{-1}}$. Uvažujte, že oba jevy působí zvlášť.

Vašek by rád výlet se Starmanem.

Částí úlohy je vyřešit gravitační posuv vlnové délky v centrálním gravitačním poli. Tento efekt je dán čistě relativistickými jevy, které řeší obecná relativita. My se však pokusíme problém vyřešit nejdříve intuitivně užitím klasické fyziky. Poté si ukážeme řešení, které vychází z jednoho ze základních principů obecné teorie relativity, principu ekvivalence.

Klasický přístup ke gravitačnímu posuvu vlnové délky

Uvažujme pouze vliv gravitačního pole Země. Pro vyřešení této úlohy využijeme zákon zachování energie pro fotony vyzářené laserem. Náš foton se pohybuje v centrálním gravitačním poli Země, a proto při jejím opouštění se jeho gravitační potenciální energie zvýší z hodnoty $E_{\mathrm{p},0}$ na hodnotu E_p. Změnu gravitační potenciální energie vzhledem k ostatním tělesům (jako např. Slunci) zanedbáváme. Změna této energie se projeví změnou frekvence fotonu. Při výstupu z laseru na povrchu Země bude mít foton frekvenci f_0 a u Starmana frekvenci f. Celkově ze zákona zachování energie dostáváme rovnost

$$hf_0 + E_{\mathrm{p},0} = hf + E_\mathrm{p}\,, \tag{1}$$

kde h je Planckova konstanta. Dále musíme najít vztah pro potenciální energii. Přírůstek potenciální energie gravitačního pole je rovna

$$\mathrm{d}E_\mathrm{p} = -\mathbf{F}_g \cdot \mathrm{d}\mathbf{r}\,, \tag{2}$$

kde $\mathrm{d}\mathbf{r}$ je infinitezimální přírůstek polohového vektoru $\mathbf{r}$ a $\mathbf{F}_g$ je gravitační síla, pro kterou v našem případě podle Newtonova gravitačního zákona platí

$$\mathbf{F}_g = -G\frac{mM}{r^2}\hat{\mathbf{r}}\,,$$

kde G je gravitační kostanta, m je hmotnost fotonu, M je hmotnost Země, r je vzdálenost od hmotného středu Země a $\hat{\mathbf{r}}$ je jednotkový vektor ve směru polohového vektoru $\mathbf{r}$. Síla $\mathbf{F}_g$ má stejný směr a opačnou orientaci jako polohový vektor $\mathbf{r}$. Proto rovnice (2) pro přírůstek potenciální energie přejde do tvaru

$$\mathrm{d}E_\mathrm{p} = F_g \mathrm{d}r = G\frac{mM}{r^2}\mathrm{d}r\,, \tag{3}$$

kde F_g je velikost síly $\mathbf{F}_g$. Integrováním levé a pravé strany rovnice (3) dostaneme

$$E_\mathrm{p} = -G\frac{mM}{r} + C\,,$$

kde C je integrační konstanta, která se obvykle volí jako $C = 0$, aby byla nulová hladina potenciální energie v nekonečnu. Tuto potenciální energii dosadíme do rovnice (1),

$$hf_0 - G\frac{m_0 M}{r_0} = hf - G\frac{mM}{r}\,.$$

Otázkou je, co máme dosadit za hmotnost fotonu. Využijeme Einsteinova vztahu ekvivalence energie a hmotnosti $E = mc^2$ a za hmotnost dosadíme $m = hf/c^2$. Po dosazení rovnici vydělíme Planckovou konstantou h,

$$f_0 - G\frac{f_0 M}{r_0 c^2} = f - G\frac{fM}{rc^2}\,.$$

Z této rovnice vyjádříme poměr frekvencí f/f_0,

$$\frac{f}{f_0} = \frac{1 - \frac{GM}{r_0 c^2}}{1 - \frac{GM}{rc^2}}\,.$$

Pro poměr vlnových délek λ/λ_0 platí reciproký vztah

$$\frac{\lambda}{\lambda_0} = \frac{1 - \frac{GM}{rc^2}}{1 - \frac{GM}{r_0 c^2}}\,.$$

Uvědomme si, že v našem případě je člen $\frac{GM}{r_0 c^2}$ velmi malý (tj. $\frac{GM}{r_0 c^2} \ll 1$), popř. člen $\frac{GM}{rc^2}$, a proto můžeme použít aproximaci $\frac{1}{1+x} \approx 1 - x$, jedná se o první dva členy Tayolorova rozvoje okolo bodu $x = 0$. Ke tvaru této aproximace můžeme také rychle dospět rozšířením zlomku $\frac{1}{1+x}$ výrazem $1-x$. Jmenovatel tak nabyde tvaru $1-x^2$. Vzhledem k tomu, že provádíme aproximaci do řádu x, můžeme člen x^2 ve jmenovateli zanedbat. Použitím aproximace dostáváme

$$\frac{\lambda}{\lambda_0} \approx \left(1 - \frac{GM}{rc^2}\right)\left(1 + \frac{GM}{r_0 c^2}\right) \approx 1 - \frac{GM}{rc^2} + \frac{GM}{r_0 c^2}\,.$$

Relativní rozdíl pak je

$$\frac{\Delta\lambda}{\lambda_0} = \frac{\lambda - \lambda_0}{\lambda_0} = \frac{\lambda}{\lambda_0} - 1 \approx \frac{GM}{c^2}\left(\frac{1}{r_0} - \frac{1}{r}\right)\,. \tag{4}$$

Dosadíme-li číselné hodnoty $M = 6 \cdot 10^{24}\,\mathrm{kg}$, $r_0 = 6 \cdot 10^6\,\mathrm{m}$ a další, zjistíme, že rozdíl vlnové délky světla, které Starman pozoruje a které Musk ze Země vyzáří, je řádově jen $10^{-9}\lambda_0$.

Elektromagnetický Dopplerův jev

Nyní budeme samostatně uvažovat elektromagnetický (relativistický) Dopplerův jev. V případě, že se zdroj a příjemce vzájemně vzdalují ve směru šíření signálu rychlostí v, platí pro něj vztah

$$f = f_0\sqrt{\frac{1 - \frac{v}{c}}{1 + \frac{v}{c}}}\,,$$

kde c je rychlost světla ve vakuu. Jednoduchým přepočtem podle vztahu $c = \lambda f$ dostaneme pro vlnové délky vztah

$$\lambda = \lambda_0\sqrt{\frac{1 + \frac{v}{c}}{1 - \frac{v}{c}}}\,.$$

Rychlost v, kterou se Starman vzdaluje od Země je v porovnání s rychlostí světla c velmi malá (nerelativistická). Můžeme tak využít přiblížení $\sqrt{1+x} \approx 1 + 1/2x$ pro malá x (tj. $x \ll 1$), jedná se o první dva členy Taylorova rozvoje okolo bodu $x = 0$. Po aproximaci dostáváme

$$\frac{\lambda}{\lambda_0} \approx \frac{1 + \frac{v}{2c}}{1 - \frac{v}{2c}}\,.$$

Použijeme-li ještě aproximaci $\frac{1}{1+x} \approx 1 - x$, kterou jsme již jednou použili výše, dostaneme

$$\frac{\lambda}{\lambda_0} \approx \left(1 + \frac{v}{2c}\right)^2 \approx 1 + \frac{v}{c}\,.$$

Relativní rozdíl vlnových délek je pak

$$\frac{\Delta\lambda}{\lambda_0} = \frac{\lambda - \lambda_0}{\lambda_0} = \frac{\lambda}{\lambda_0} - 1 \approx \frac{v}{c}\,. \tag{5}$$

Dosazením číselných hodnot dostaneme, že rozdíl vlnových délek způsobený elektromagnetickým Dopplerovým jevem je přibližně $10^{-5}\lambda_0$. Z vypočtených hodnot můžeme usoudit, že vliv Dopplerova jevu je v našem problému asi o 4 řády větší než vliv gravitačního pole Země.

Obecně relativistický přístup ke gravitačnímu posuvu vlnové délky

Jedním ze základních principů, na nichž je vybudovaná obecná teorie relativity, je princip ekvivalence. Názorně je tento princip představen v myšlenkovém experimentu s tzv. Einsteinovým výtahem. Podle principu ekvivalence nemůže osoba nacházející se v uzavřeném výtahu žádným experimentem zjistit, zda se výtah nachází v homogenním gravitačním poli, anebo zrychluje s konstantním zrychlením. V prvním případě na osobu působí gravitační síla a v druhém případě setrvačná síla. Jedná se tedy o princip ekvivalence gravitační a setrvačné hmotnosti.

Pro úplnost dodejme, že druhým krajním případem je situace, kdy není schopna osoba uvnitř uzavřeného výtahu rozlišit, zda se nachází ve volně padajícím výtahu v homogenním gravitačním poli, anebo jako volný objekt ve vakuu.

Einsteinovým výtahem vyřešíme i naši úlohu. Foton v gravitačním poli umístíme do myšleného Einsteinova výtahu o malé výšce Δh (jedná se o klidovou výšku), který se vzhledem k Zemi nepohybuje. Foton poletí od podlahy ke stropu. U podlahy má vlnovou délku λ_p a u stropu λ_s. Vlivem gravitačního pole bude vlnová délka λ_s větší než λ_p. Kvantitativní výsledek tohoto experimentu neznáme. Víme však, že bude stejný jako v druhé situaci. V té se výtah nachází ve vakuu a zrychluje se zrychlením $\mathbf{a}$, které má stejnou velikost a opačnou orientaci jako intenzita gravitačního pole $\mathbf{K}$ v první situaci.

Na obě situace budeme nahlížet z pohledu pozorovatele uvnitř výtahu. Z první situace víme, že doba letu fotonu výtahem je rovna

$$\Delta t = \frac{\Delta h}{c}\,.$$

Vzhledem k tomu, že se nacházíme v relativitě, upřesňujeme, že se jedná o čas, který by naměřil onen pozorovatel ve výtahu. Ten samý čas naměří v druhé situaci. V druhé situaci však za tento čas zrychlí výtah o rychlost

$$\Delta v = a\Delta t = \frac{a\Delta h}{c}\,.$$

To znamená, že rozdíl rychlosti při vyzáření fotonu u podlahy výtahu, kde měl vlnovou délku λ_p, a při detekci fotonu u stropu výtahu, kde měl vlnovou délku λ_s, je právě Δv. Osoba ve výtahu v této situaci by tedy spočítala změnu vlnové délky fotonu podle elektromagnetického Dopplerova jevu, který už umíme popsat kvantitativně.

Využijeme už dříve získané aproximace, tj. rovnice (5), podle které v našem případě platí

$$\frac{\lambda_s - \lambda_p}{\lambda_p} = \frac{\Delta\lambda}{\lambda_p} \approx \frac{\Delta v}{c} = \frac{a\Delta h}{c^2}\,.$$

Vzhledem k tomu, že v našem problému se Starmanem se foton pohybuje v nehomogenním gravitačním poli, musíme přejít k infinitezimálním změnám,

$$\frac{\mathrm{d}\lambda}{\lambda} = \frac{K\mathrm{d}h}{c^2}\,.$$

Zde píšeme už rovnost, neboť při přechodu k infinitezimálním přírůstkům všechny členy, které jsme zanedbali, vymizí. Zároveň jsme za zrychlení dosadili velikost intenzity gravitačního pole $\mathbf{K}$, pro kterou platí

$$K = \frac{GM}{r^2}\,.$$

Dosazením dostaneme rovnici

$$\frac{\mathrm{d}\lambda}{\lambda} = \frac{GM}{c^2 r^2}\mathrm{d}r\,.$$

Zde je infinitezimální přírůstek vzdálenosti $\mathrm{d}h = \mathrm{d}r$. Integrováním levé a pravé strany poslední rovnice dostaneme

$$\ln\frac{\lambda}{\lambda_0} = -\frac{GM}{c^2}\left(\frac{1}{r} - \frac{1}{r_0}\right)\,.$$

Nyní použijeme aproximace $\ln x \approx x - 1$ v okolí bodu $x = 1$. Víme totiž, že vlnová délka se příliš nezmění. Dostáváme tedy

$$\frac{\lambda}{\lambda_0} - 1 = \frac{\Delta\lambda}{\lambda_0} \approx \frac{GM}{c^2}\left(\frac{1}{r_0} - \frac{1}{r}\right)\,.$$

To je stejný výsledek jako v případě klasického přístupu (rovnice (4)). Uvědomme si však, že v případě klasického přístupu jsme postupovali spíše tak, že jsme jen použili několik, na první pohled vhodných, známých vzorečků. Použití některých vzorečků jsme ani pořádně neodůvodnili, což ale nelze, protože gravitační posuv vlnové délky je čistě obecně relativistický jev. Správný postup řešení příkladu je tedy pouze skrze obecnou teorii relativity. V případě, že bychom chtěli uvažovat jak gravitační posuv vlnové délky, tak elektromagnetický Dopplerův jev zároveň, se už bez nástrojů obecné teorie relativity neobejdeme.

Václav Mikeska
`v.mikeska@fykos.cz`

Fyzikální korespondenční seminář je organizován studenty MFF UK. Je zastřešen Oddělením propagace a mediální komunikace MFF UK a podporován Ústavem teoretické fyziky MFF UK, jeho zaměstnanci a Jednotou českých matematiků a fyziků.