

Seriál: Elektro-triky

Úvod

Tento díl seriálu je zaměřený na tipy a triky pro řešení elektrických obvodů a některých úloh v elektrostatice. Začneme ale s obecným řešením nekonečných problémů, které se může hodit i jinde. Ukážeme si, že je možné využít Gaussův zákon i v gravitačním poli, pouze s jinými konstantami. Ačkoli je ústředním tématem tohoto dílu elektřina, rozhodně to není jediné téma.

Pro další čtení doporučujeme knihovničku Fyzikální olympiády. Těchto témat se týkají zejména M. Jarešová: *Elektrické obvody (Stejnoseměrný proud)*¹ a P. Šedivý: *Obvody střídavého proudu s lineárními jednobrany a dvojbřany*.²

Matematické hrátky s nekonečnem

Než se vrhneme na samotné nekonečné obvody, mohli bychom se podívat na matematickou stránku věci. Uvědomme si základní princip, který se v těchto úlohách uplatňuje a díky kterému jsou tyto úlohy daleko jednodušší než stejné úlohy s konečným počtem prvků. Když už se vám něco „stejně zopakuje“ třikrát či čtyřikrát, začnete si snad sami časem říkat: „Proč to tam raději není nekonečněkrát?“

O jaký princip jde? Pokud máme něco nekonečněkrát, tak je to to samé, jako když to máme nekonečněkrát a ještě jednou.³ Možná to stále zní docela divně. Proto se podívejme na nějaké matematické příklady. Jakou hodnotu má například tato nekonečná soustava odmocnin?

$$x = \sqrt{1 + \sqrt{1 + \sqrt{1 + \sqrt{1 + \sqrt{1 + \dots}}}}}$$

Na první pohled těžko říct. Mohli bychom zkusit postupně čím dál tím více konečných prvků. Tedy můžeme začít

$$x_1 = \sqrt{1} = 1, \quad x_2 = \sqrt{1 + \sqrt{1}} = \sqrt{2} \doteq 1,414, \quad x_3 = \sqrt{1 + \sqrt{1 + \sqrt{1}}} = \sqrt{1 + \sqrt{2}} \doteq 1,554.$$

Tato metoda může vést ke správnému výsledku, pokud řada konverguje. Jinak řečeno, pokud se limitně blíží k nějakému konkrétnímu číslu. Je ale vidět, že jde o hodně pracný způsob. Také jen těžko odhadneme, jaké by mělo být přesné řešení úlohy pro nekonečné množství prvků. Pokud bychom pokračovali dále, po osmém kroku bychom zjistili, že při zaokrouhlení na čtyři platné cifry nám už výsledek zůstává stejný. Ale těžko ověříme, zda to bude platit pro nekonečně mnoho dalších prvků této řady. Můžeme použít kalkulačku, ale ta také brzy přestane stačit.

Trikové řešení spočívá v tom, že si uvědomíme, že můžeme psát

$$x = \sqrt{1 + x},$$

¹<http://fyzikalniolympiada.cz/texty/elobvody.pdf>

²<http://fyzikalniolympiada.cz/texty/stpr1.pdf>

³Případně ještě dvakrát. Nebo znovu konečně-krát. Dokonce i nekonečně-krát. Ale při výpočtech si to nebudeme zbytečně komplikovat, většinou je nejrychlejší přidat si právě jeden prvek.

což je skrytá kvadratická rovnice. Tu briskně vyřešíme

$$x^2 = 1 + x \quad \Rightarrow \quad x^2 - x - 1 = 0 \quad \Rightarrow \quad x_{1,2} = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}.$$

Protože odmocnina je definována jako kladné číslo, správným řešením bude kořen $s +$ (v případě opačné definice by řešením byl kořen $s -$). Výsledkem je tedy $x = (1 + \sqrt{5})/2 \doteq 1,618$. Toto číslo se nazývá *zlatý řez*, obvykle se značí φ a najdeme jej na mnoha místech v přírodě.

Stejný postup můžeme použít například u nekonečných řetězových zlomků

$$y = \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \dots}}} = \frac{1}{1 + y},$$

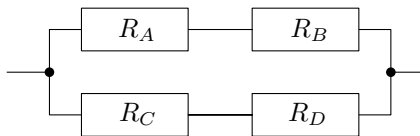
$$y^2 + y - 1 = 0 \quad \Rightarrow \quad y_{1,2} = \frac{-1 \pm \sqrt{5}}{2}.$$

V tomto případě vyhovují obě řešení. Nicméně, pouze to $s +$ je stabilní. Sami si vyzkoušejte, že při malé výchylce se řešení $s +$ po několika iteracích opět vrátí k původní hodnotě, zatímco řešení $s -$ bude čím dál tím víc kolísat. Správné řešení je podmíněno tím, že k němu výraz konverguje, když jde počet zlomků do nekonečna. To splňuje pouze $y = (\sqrt{5} - 1)/2 \doteq 0,618$. Shodou okolností je to opět číslo se vztahem ke zlatému řezu, konkrétně $y = \varphi - 1$ či $y = 1/\varphi$.

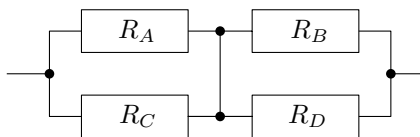
Shodnost potenciálů

Jedním z nejdůležitějších principů pro řešení elektrických obvodů je, že pokud vodičem spojíme dvě místa v obvodu, která mají stejný potenciál, nepoteče mezi nimi žádný proud.

Podívejme se, co to znamená pro podmínku na jedno z nejjednodušších možných uspořádání rezistorů, kterou můžeme mít. Máme dvě varianty zapojení, a to zapojení po dvojicích paralelně (obrázek 1) a druhé, kde přidáme ještě příčku, která nemá odpor (obrázek 2).



Obr. 1: První zapojení.



Obr. 2: Druhé zapojení.

V prvním případě určíme odpor snadno jako

$$R_\alpha = \frac{(R_A + R_B)(R_C + R_D)}{R_A + R_B + R_C + R_D}.$$

V druhém případě je to

$$R_\beta = \frac{R_A R_C}{R_A + R_C} + \frac{R_B R_D}{R_B + R_D}.$$

Jak vidíme, obecně nám mohou vyjít různé velikosti celkových odporů. Pokud bychom si ale s výrazem chvíli hráli, tak si uvědomíme, že pokud platí

$$\frac{R_A}{R_B} = \frac{R_C}{R_D},$$

pak budou výrazy shodné. Tedy například, pokud vyjádříme $R_D = R_B R_C / R_A$ a dosadíme, dostaneme

$$\begin{aligned} R_\alpha &= \frac{(R_A + R_B)(R_C + R_C \frac{R_B}{R_A})}{R_A + R_B + R_C + R_C \frac{R_B}{R_A}} = \frac{\frac{R_C}{R_A}(R_A^2 + R_A R_B + R_A R_B + R_B^2)}{\frac{1}{R_A}(R_A^2 + R_A R_B + R_A R_C + R_B R_C)} = \\ &= \frac{R_C(R_A + R_B)^2}{(R_A + R_C)(R_A + R_B)} = \frac{R_C(R_A + R_B)}{R_A + R_C} = \frac{R_A + R_B}{1 + \frac{R_A}{R_C}}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} R_\beta &= \frac{R_A R_C}{R_A + R_C} + \frac{R_B R_C \frac{R_B}{R_A}}{R_B + R_C \frac{R_B}{R_A}} = \frac{R_A R_C}{R_A + R_C} + \frac{R_B R_C}{R_A + R_C} = \\ &= \frac{R_C(R_A + R_B)}{R_A + R_C} = \frac{R_A + R_B}{1 + \frac{R_A}{R_C}}. \end{aligned}$$

Sice jsme podmínku nedostali analytickým postupem, ale pokud ji odhadneme a ověříme, že při ní platí to, co potřebujeme, tak nemusíme řešit, odkud se vzala.

Tuto záměnu, kde si přidáme či odebereme nějaká vodivá spojení, můžeme s výhodou použít především ve složitějších úlohách. Například si jde takto zjednodušit řešení úlohy FYKOSu 22-VI-1⁴, kde se určoval odpor n -dimenzionální drátěné krychle mezi nejvzdálenějšími vrcholy.

Převody zapojení trojúhelník – hvězda

V komplexnějších obvodech, kde si nevystačíme s pouhým jednoduchým sériovým a paralelním zapojením, se nám může hodit transformace trojúhelník – hvězda a zpět. O co jde? Pokud máme mezi nějakými třemi uzly v obvodu tři rezistory zapojené do hvězdy (viz obrázek 3), pak toto zapojení je ekvivalentní dobře zvoleným odporům zapojených do trojúhelníku (viz obrázek 4). Pokud si zvolíme označení, kde je rezistor ve straně trojúhelníku označen stejným indexem jako protilehlý paprsek hvězdy, pak se dají vztahy i snadněji zapamatovat⁵. Platí

$$R_A = r_B + r_C + \frac{r_B r_C}{r_A},$$

⁴https://fykos.cz/_media/rocnik22/ulohy/pdf/uloha22_6_1.pdf

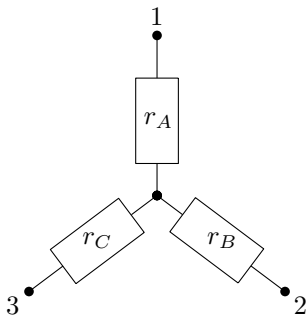
⁵Například oproti srovnání se vztahy uvedenými v knihovničce FO.

$$r_A = \frac{R_B R_C}{R_A + R_B + R_C}.$$

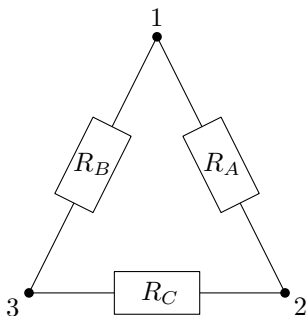
V obou vztazích samozřejmě platí cyklická záměna. Přičemž pro odpory mezi dvěma uzly (např. 1 a 2) máme

$$R_{12} = r_A + r_B = R_C \frac{R_A + R_B}{R_A + R_B + R_C},$$

kde opět platí cyklická záměna (s upgradem, že musíme cyklit i 123).



Obr. 3: Zapojení ve tvaru hvězdy.



Obr. 4: Zapojení ve tvaru trojúhelníku.

Princip superpozice

V elektrických obvodech i v elektrickém poli se uplatňuje princip superpozice, který jsme již zmiňovali. Konkrétní aplikací mohou být nekonečné elektrické sítě. Například čtvercová síť, kde má každý drátek odpor R . Pak je odpor mezi sousedními uzly $R/2$.⁶ Pokud máme trojúhelníkovou síť, kde z každého uzlu jde šest hran do sousedních uzlů, odpor mezi sousedními uzly bude analogicky $R/3$.⁷

⁶Viz příklad 8 v Elektrických obvodech v knihovničce FO.

⁷Viz úloha EG ve FYKOSím Fyziklání 2018.

Zrcadlový náboj

Zrcadlový náboj je metoda využívaná v elektrostatice. Použit ji můžeme, pokud umístíme elektrické náboje do blízkosti uzemněné desky. Uzemnění znamená, že je na ní nulový potenciál. Tím, že k ní přiblížíme náboj, způsobíme změnu potenciálu. Deska na to reaguje tak, že ze země přijme či do ní odevzdá elektrony, které na ní opět vynulují potenciál.

Tomuto jevu se říká elektrostatická indukce. Výsledné elektrické pole bude součtem pole původního náboje a pole od indukovaného náboje. Přesný výpočet vypadá velmi obtížně, ale naštěstí máme k dispozici trik. Využijeme toho, že elektrostatické pole je jednoznačně určeno svými okrajovými podmínkami. Jinak řečeno, pokud najdeme pole, které dává na okraji nějaké oblasti takový potenciál, jaký tam má být, našli jsme skutečné pole v dané oblasti.

Nyní si představme dva stejně velké opačné náboje. Snadno spočítáme potenciál výsledného pole. Pokud jeho hodnotu v nekonečnu položíme rovnou nule, zjistíme, že je nulový také v rovině dané body, které jsou od obou nábojů stejně daleko. Tím jsme ale našli pole, které přesně odpovídá nekonečně velké uzemněné desce, neboli rovině s nulovým potenciálem.

Z těchto úvah vyplývá, že když umístíme nad uzemněnou desku bodový náboj, výsledné pole bude součtem pole skutečného náboje a pole od jeho obrazu, tedy od stejně velkému opačného náboje, který se nachází na druhé straně desky, přičemž je od ní stejně daleko. Tento náboj je samozřejmě pouze imaginární, ve skutečnosti je pole generováno nábojem, který se indukuje přímo na desce.

Na základě tohoto můžeme velice jednoduše určit sílu, kterou je náboj přitahován k desce, jako sílu, kterou na sebe působí tyto náboje. Další ukázkou aplikace tohoto principu může být úloha FYKOSu 22-VI-2 – útěk z koule.⁸

Oblast na druhé straně desky je ohraničená nekonečnou a deskou. Na celé hranici této oblasti je tak nulový potenciál a to dokážeme triviálně splnit nulovým elektrickým polem. Tím jsme došli k závěru, že nekonečná uzemněná deska dokonale stíní elektrické pole.

Gaussův zákon

Další metodou, kterou použijeme v elektrostatice či v gravitačním poli, je Gaussův zákon. Ten nám dává vztah mezi intenzitou pole vycházející z povrchu nějaké oblasti a náboji uvnitř dané oblasti. Začneme s obecným vztahem pro elektrostatiku ve vakuu⁹

$$\int_{\partial V} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} = \frac{Q}{\epsilon_0},$$

kde V je námi vybraný objem ohraničený dvourozměrnou plochou, kterou značíme ∂V – taktó se obvykle značí hranice množiny.¹⁰ Integrujeme intenzitu elektrického pole \mathbf{E} přes plošné elementy $d\mathbf{S} = \mathbf{n}dS$, kde \mathbf{n} je normálový vektor k ploše dS . Skalární součin má význam průmětu \mathbf{E} do směru \mathbf{n} . Uvedený vzoreček platí obecně pro libovolně komplikované plochy s tím, že nesmíte

⁸https://fykos.cz/_media/rocnik22/ulohy/pdf/uloha22_6_2.pdf

⁹V obecném případě platí

$$\int_{\partial V} \mathbf{D} \cdot d\mathbf{S} = Q,$$

kde \mathbf{D} je elektrická indukce, což zohledňuje i nevakuum prostředí.

¹⁰Tedy ∂X je hranice množiny X . Pro X interval to jsou hraniční body počátku a konce intervalu. Kdyby byla množina X čtyřrozměrná, tak by její hranice byla třírozměrná. Integrovat obecně můžeme přes libovolně-rozměrnou množinu, akorát je to ve více rozměrech trochu složitější.

zapomenout na jejich orientaci, tedy že vektor \mathbf{n} míří směrem ven z dané oblasti. Dále Q je celkový elektrický náboj v oblasti a ε_0 je permitivita vakua.

Pro vysoce symetrické problémy si vzorec přepíšeme do zjednodušeného tvaru

$$ES = \frac{Q}{\varepsilon_0}.$$

Co znamená ta vysoká symetrie? Potřebujeme vždy vybrat takovou plochu, na které má elektrická intenzita konstantní velikost a zároveň je v každém bodě na tuto plochu kolmá a míří směrem ven z oblasti. Pro názornější vysvětlení si ukážeme pár příkladů. Pokaždé budeme hledat intenzitu elektrického pole na základě známého rozložení nábojů, ale postup lze v případě potřeby samozřejmě otočit.

Příklad – plná homogenně nabitá koule

Představme si, že máme kouli o poloměru R , do které někdo rovnoměrně nastřílel¹¹ elektrické náboje, které se nemohou hýbat. Koule je tak homogenně nabitá s hustotou náboje ρ . Hledáme intenzitu elektrického pole v celém prostoru.

Všimněme si, že situace je sféricky symetrická. Stejně tak musí být symetrické i elektrické pole. Vektory \mathbf{E} tak musí vždy mířit ve směru přímkou procházející středem koule.

Nejdříve uvažujme, že jsme ve vzdálenosti r od středu, kde $r > R$. Představme si kouli s poloměrem r a se středem ve středu nabité koule. Z předchozího pozorování vyplývá, že \mathbf{E} je kolmá na její povrch, zároveň má na něm díky symetrii všude stejnou velikost, označme ji E . Můžeme tak použít zjednodušující vzorec

$$ES = \frac{Q}{\varepsilon_0}.$$

Plochu spočítáme jako povrch myšlené koule $S = 4\pi r^2$, dosazením dostáváme

$$E = \frac{Q}{\varepsilon_0 S} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{Q}{r^2} = \frac{\rho R^3}{3\varepsilon_0 r^2},$$

což je Coulombův zákon pro bodový náboj. Vyšlo nám, že pole vně rovnoměrně nabité koule s celkovým nábojem Q je stejné jako pole od bodového náboje Q . To je ale logické – Gaussův zákon říká, že integrál \mathbf{E} přes hranici nějaké oblasti je přímo úměrný náboji uvnitř. Pokud bude náboj sféricky symetrický, integrál se změní na pouhý součin velikosti intenzity a povrchu koule. Potom už nezávisí na konkrétním rozložení náboje – můžeme jej klidně zmenšit do libovolně malé oblasti, například do jednoho bodu.

Podívejme se na zajímavější situaci pod povrchem koule, neboli když $r < R$. V tom případě je sice vzorec pro plochu stále stejný, ale pod touto plochou je menší množství náboje, konkrétně

$$q = \frac{r^3}{R^3} Q.$$

Pro intenzitu tak dostáváme

$$E = \frac{q}{\varepsilon_0 S} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{Qr}{R^3} = \frac{\rho r}{3\varepsilon_0}.$$

S rostoucí vzdáleností od středu koule roste intenzita elektrického pole lineárně. Je rozumné očekávat, že s rostoucí vzdáleností musí intenzita růst z nulové hodnoty na tu, která odpovídá

¹¹Technologicky je možné takto do plastu nastřílet relativně dobře definované náboje i do hloubky.

intenzitě na povrchu koule zvnějšku.¹² Dosazením $r = R$ do obou vzorců vidíme, že tento předpoklad je splněn.

Ještě jednou zdůrazněme to, že pokud máme sféricky symetricky nabitou kouli, tak do elektrického pole v libovolném bodě pod jejím povrchem nijak nezasahují vrstvy, které leží ve větší vzdálenosti od středu. Toto tvrzení se dá případně dokázat i pomocí prosté integrace intenzity, ale zdůvodnění na základě Gaussova zákona je mnohem jednodušší.

Příklad – plný homogenně nabitý válec

Označme poloměr válce R a nábojovou hustotu ρ . Pro jednoduchost předpokládejme, že je náš válec nekonečně dlouhý. Potom ze symetrie vyplývá, že vektor \mathbf{E} bude v každém bodě kolmý na osu válce, a tedy i na jeho povrch.

Začneme opět vnějším řešením. Představíme si válec s poloměrem r a s výškou h , který je souosý s nabitým válcem. Opět můžeme použít jednodušší verzi Gaussova zákona, kde tentokrát za plochu dosadíme povrch pláště $S = 2\pi rh$. Náboj, který je uzavřen myšleným válcem, je $Q = \pi R^2 h \rho$. Dostáváme tak

$$E = \frac{Q}{S\varepsilon_0} = \frac{R^2 \rho}{2r\varepsilon_0}.$$

Intenzita elektrického pole klesá přímo úměrně s rostoucí vzdáleností od středu nabitého válce. Analogicky můžeme prozkoumat vnitřní oblast

$$E = \frac{q}{S\varepsilon_0} = \frac{r\rho}{2\varepsilon_0}.$$

Intenzita uvnitř také roste lineárně se vzdáleností od středu, obdobně jako u plné koule. Možná, že se nekonečný válec může zdát jako sci-fi, ale v případě, že zkoumáme chování nabitě částice v blízkosti nabitého klasického drátěného vodiče, jde o dobré přiblížení.

Příklad – nekonečně rozlehlá rovnoměrně nabitá rovina

Představme si nekonečně rozlehlou a přitom velice tenkou nabitou rovinu s plošnou nábojovou hustotou σ . Zajímá nás, jaká bude intenzita elektrického pole v celém prostoru (kromě samotné tenké desky). Vzhledem k tomu, že jde o plošnou nábojovou hustotu, rovnou tušíme, že zde nastane skoková změna intenzity. Jako oblast pro Gaussovu větu si opět zvolíme váleček, který umístíme tak, že jeho hlavní osa bude kolmá k rovině (takže podstavy budou rovnoběžné s rovinou). Zároveň budeme chtít, aby váleček procházel deskou. Když si, obdobně jako u nekonečného válce, uvědomíme, že skrz plášť válečku nemůže téct žádná elektrická intenzita, pak je jasné, že záleží jenom na podstavách. Označíme-li plochu podstavy S , bude ve válci celkový náboj $Q = S\sigma$. Pro elektrickou intenzitu dostáváme

$$E = \frac{Q}{2S\varepsilon_0} = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}.$$

Při výpočtu jsme si zvolili směr intenzity od desky, a to na obou stranách. Vzpomeňme si, že orientaci plochy (resp. vektoru \mathbf{n}) jsme si definovali jako kladnou, pokud mířila směrem ven z oblasti. Na každé straně je směr ven z válce stejný jako směr od desky, což je směr elektrické intenzity. Opět jsme tak mohli použít jednodušší verzi Gaussovy věty.

¹²Intenzita elektrického pole obecně nemusí být spojitá. Každá nespojitost je však způsobena plošnými náboji, které v tomto případě nemáme.

Vyšlo nám, že elektrické intenzity mají na obou stranách stejnou velikost, ale opačný směr. To je opět způsobeno symetrií – obě strany musí být vůči sobě zrcadlově převrácené. Celkový „skok“ v intenzitě tak bude

$$\Delta E = 2E = \frac{\sigma}{\epsilon_0}.$$

Pokud bychom desku umístili do prostoru s homogenním elektrickým polem \mathbf{E}_0 , výsledné pole bude součtem vnějšího pole \mathbf{E}_0 a pole desky. Tím se naruší symetrie a výsledná intenzita už nebude na obou stranách stejně velká. Důležité ale je, že skok v intenzitě zůstane zachován.

Dále si všimněme, že výsledek nezávisí na vzdálenosti od desky. To je dáno tím, že jde o 2D nekonečnou desku umístěnou v 3D prostoru. Tok se tedy se vzdáleností nemůže nijak zředit, na rozdíl od toku od bodového náboje či od nekonečného válce.

Pokud bychom chtěli, tenkou desku bychom mohli nahradit deskou konečné tloušťky s homogenním nábojem o hustotě ρ a tím odstranit skok v intenzitě. Získali bychom tím spojitou změnu intenzity uvnitř desky. Tato situace se dá použít jako aproximace pole v blízkém okolí nabitých vodivých těles, uvnitř vodiče se náboje můžou volně pohybovat, a tedy se náboj umístí jen na jeho povrchu. Navíc uvnitř vodivého tělesa je elektrické pole nulové, je právě odstíněné indukovanými náboji na svém povrchu. V blízkosti povrchu je tedy pole právě σ/ϵ_0 kolmé k povrchu vodiče.

Poznámka k analogiím

Elektrostatické pole je ekvivalentní¹³ gravitačnímu poli. Vztahy pro sílu jsou analogické. Jediný podstatný rozdíl je v tom, že zatím každá známá látka má hmotnost, která se navzájem přitahuje, kdežto elektrický náboj může být kladný i záporný. Kvůli tomu také nelze odstínit gravitační pole, ale elektrické odstínit můžeme. Další rozdíly jsou pak už jenom v konstantách a v tom, že „gravitační náboj“ a konstanta úměrnosti mezi silou a zrychlením je ta samá veličina (hmotnost), zatímco u elektrického pole se jedná o dvě různé veličiny. Jinak můžeme používat všechno, co se naučíme pro jedno pole, také v druhém.

Gaussův zákon pro gravitační pole má tvar

$$\int_{\partial V} \mathbf{K} \cdot d\mathbf{S} = -4\pi GM,$$

kde \mathbf{K} je intenzita gravitačního pole, G je gravitační konstanta a M je celková hmotnost uvnitř naší oblasti. Pracujeme s ním stejně jako s elektrostatickou verzí.

Analogie se nám pak mohou hodit k řešení úloh. Například mechanické kmitání a vlnění je analogické elektromagnetickému kmitání a vlnění.

Závěr a upoutávka na příště

Probrali jsme několik vztahů, které lze použít při řešení úloh s elektrickými obvody či v elektrostatice. Také jsme si vysvětlili základní smysl Gaussova zákona. Při řešení úloh nepamínejte dodržovat to, co jsme si řekli v prvním dílu seriálu – zaokrouhlovat správně, dávat odpovědi na otázky ze zadání, snažit se o grafickou úpravu. V příštím díle se podíváme na extrémy.

¹³Alespoň, co se klasické fyziky týká.

Většinu fyzikálních problémů lze totiž převést na hledání extrémů. Například soustavy „chtějí“ zaujmout stav s nejnižší energií nebo světlo se vždy pohybuje po dráze s extrémním časem.

Fyzikální korespondenční seminář je organizován studenty MFF UK. Je zastřešen Oddělením propagace a mediální komunikace MFF UK a podporován Ústavem teoretické fyziky MFF UK, jeho zaměstnanci a Jednotou českých matematiků a fyziků.

Toto dílo je šířeno pod licencí Creative Commons Attribution-Share Alike 3.0 Unported.
Pro zobrazení kopie této licence navštivte <http://creativecommons.org/licenses/by-sa/3.0/>.