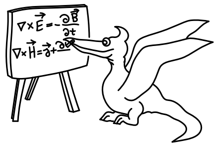

Seriál: Zákony zachování

Ústřední koncept zákonů zachování

Jak jsme si v minulém díle řekli, díky symetriím platí zákony zachování (dále ZZ), které můžeme využít pro řešení úloh. Nicméně některé „ZZ“ nemusí platit vždy. Přičemž tím nutně nemyslíme to, že se fyzikální zákony mohou měnit v průběhu existence vesmíru, což zatím nebylo ani pozorováno ani vyvráceno. Máme ZZ, které se zatím pevně drží vůči všem možným testům (např. ZZ hybnosti, náboje, energie), ale pak je kategorie ZZ, které mají jen omezenou škálu platnosti (např. ZZ hmotnosti).

Velice důležité u ZZ je uvědomění si jeho vztahu ke zkoumanému systému. První zákonitostí je, že pokud máme uzavřený systém, tak nám celková hodnota zachovávající se veličiny nemůže klesnout či stoupnout a musí být stále stejná ve všech okamžicích.[1] Pokud si vybereme pouze část toho systému nebo je náš systém obklopen nějakým dalším, se kterým může interagovat, pak pokud nějaké množství veličiny do zvoleného podsystému vstoupí, musí z něj i vystoupit nebo se v něm musí uložit.

Z jiného úhlu pohledu se na to můžeme dívat tak, že z daného podsystému nemůžeme donekonečna čerpat veličinu zachovávající se v rámci většího uzavřeného systému. Tento obecný princip pak rovnou zakazuje perpetuum mobile prvního druhu. Když se s těmito obecnými principy sžijeme, hned se nám bude jednodušeji pracovat se všemi typy úloh.

Zákon zachování hmotnosti

ZZ hmotnosti je jedním z těch starších. Byl objeven v druhé polovině 18. století nezávisle na sobě nejdříve M. V. Lomonosovem a později A. L. Lavoisierem. Jak jsme zmínili v úvodu, je jedním ze slabších ZZ. Platí totiž přesně v klasické mechanice, dostatečně dobře v termodynamice za rozumných teplot a dokonce i u chemických reakcí, pokud započítáme všechny produkty. Až u jaderných reakcí začíná být měřitelnější nezachovávání hmotnosti, která se přemění na energii. Jedním z největších rozdílů hmotnosti mezi vstupní a výstupní hmotností je v proton-protonovém cyklu ve Slunci, kdy ze 4 protonů postupně vznikne jádro ${}^4_2\mathrm{He}$. Vodík má relativní atomovou hmotnost $A\left({}^1_1\mathrm{H}\right) = 1{,}007\,825$, helium pak $A\left({}^4_2\mathrm{He}\right) = 4{,}002\,603$. Rozdíl na jeden atom helia je pak $0{,}028\,70$ v atomových hmotnostních jednotkách, což je pokles o $0{,}71\,\%$. Hmotnostní schodek se uvolní ve formě energie a neutrin. Dalo by se říct, že pokud by nám stačilo, aby zákon zachování platil až na $\pm 1\,\%$, tak u většiny dějů, které pozorujeme kolem nás, dostatečně dobře platí.

Výjimkami jsou pouze hodně drastické situace. Například pokud dojde k anihilaci hmota-antihmota, pak se všechna hmotnost přemění na energii. Nebo také při pádu hmoty do černé díry může nastat vyzáření větší části z celkové hmoty látky. Podobně zachování hmotnosti neplatí při srážkách těles relativistickými rychlostmi. Mnohem obecnější je ZZ energie, o kterém bude

[1] Je tu ovšem kvantová teorie, takže pokud zkoumáme malé škály, tak musíme uvažovat střední hodnoty. Například přesnou hybnost či energii systému nedokážeme a ani nemůžeme změřit. Změření přesné hybnosti systému by totiž znamenalo, že vůbec neznáme jeho polohu či polohy jeho součástí, a to kvůli Heisenbergově principu neurčitosti. V klasické fyzice ale můžeme předpokládat znalost přesných hodnot všech veličin v každém okamžiku.

řeč dále a který platí i ve výše zmíněných situacích. Hmotnost je ale veličinou, kterou si přeci jen dokážeme snadněji představit a i proto se stále využívá ZZ hmotnosti.

Zákon zachování hybnosti

ZZ hybnosti nám říká, že hybnost se v inerciální souřadnicové soustavě zachovává. Pro celkovou hybnost platí

$$\boldsymbol{p} = m_1 \boldsymbol{v}_1 + m_2 \boldsymbol{v}_2 + \dots + m_n \boldsymbol{v}_n = \sum_{i=1}^{n} m_i \boldsymbol{v}_i = \mathrm{konst}\,,$$

kde je m_i je hmotnost a $\boldsymbol{v}_i$ je rychlost i-té částice v systému a n je celkový počet částic.

Můžeme se transformovat i do takové inerciální souřadnicové soustavy, kde je celková hybnost všech částic nulová. To je přesně těžišťová soustava, kterou jsme zmínili již v minulém díle. Někdy bývá tento důsledek nazýván jako ZZ těžiště.

Typickým příkladem je úloha známá z českých železnic, kdy na kolejích zaparkuje nějaký dopravní prostředek. Pohyb kolmo ke kolejím zanedbáme. Předpokládejme, že dopravním prostředkem je auto celkově naložené na $m = 1{,}0\,\mathrm{t}$. Vlak má zhruba $M = 500\,\mathrm{t}$. O kolik se zpomalí vlak nárazem, resp. se urychlí auto? Předpokládáme nepružnou srážku, po které se oba dopravní prostředky spojí. Budeme předpokládat, že vlak nebrzdí, protože tam stejně asi zaparkovali na poslední chvíli. Ani nemusíme znát počáteční rychlost v_0, pokud se zajímáme pouze o poměr nové rychlosti v_1 a té původní. Platí ZZ hybnosti

$$p = M v_0 = (m + M)\, v_1 \qquad \Rightarrow \qquad \frac{v_1}{v_0} = \frac{M}{m + M} \doteq 99{,}8\,\%\,.$$

Vidíme, že nabrání jednoho auta vlak významně nezpomalí – pouze o $0{,}2\,\%$. Zato automobil je urychlen prakticky okamžitě na rychlost vlaku. Možná jste to už někdy na videích ve zprávách viděli. Opravdu to tak bývá. Důvod, proč vlak následně zastaví, je, že velice prudce brzdí. Má ale opravdu velkou hybnost, a tedy musí na koleje působit velkou silou po dostatečně dlouhou dobu, aby se zastavil.

Pokud bychom řešili úlohu s vozíčky na vzduchové dráze, které se od sebe odráží, tak by se jednalo o pružné srážky. Taková vozidla se nespojí a platí jak zákon ZZ hybnosti, tak ZZ mechanické energie.

Zákon zachování momentu hybnosti

Podobně jako ZZ hybnosti platí i ZZ momentu hybnosti. Můžeme si zvolit libovolný bod v inerciální souřadnicové soustavě a vůči němu spočítáme následující veličinu

$$\boldsymbol{L} = \sum_{i=1}^{n} \boldsymbol{r}_i \times \boldsymbol{p}_i = \boldsymbol{r}_1 \times \boldsymbol{p}_1 + \boldsymbol{r}_2 \times \boldsymbol{p}_2 + \dots + \boldsymbol{r}_n \times \boldsymbol{p}_n = \mathrm{konst}\,,$$

kde $\boldsymbol{r}_i$ je průvodič, tedy polohový vektor vycházející z námi vybraného bodu k i-tému hmotnému bodu, $\times$ je vektorový součin a $\boldsymbol{p}_i$ je hybnost i-tého hmotného bodu. Tato veličina se nám v uzavřeném systému bude opět zachovávat, ať se děje, co se děje.

Druhý Keplerův zákon

Druhý Keplerův zákon (II. KZ) je de facto ZZ momentu hybnosti pro planety obíhající Slunce, respektive tak byl původně definován. My si jej můžeme rozšířit na jakoukoliv soustavu, kde je jedno ústřední těleso obíhané nějakým počtem dalších těles, která vůči němu mají zanedbatelnou hmotnost a která se navzájem výrazně neovlivňují.[2] Hodí se pro rychlé výpočty právě v úlohách o oběhu planet ve slunečních soustavách či o oběhu měsíců kolem planet.

Vzorec, který je dobré mít na paměti, je, že plocha opsaná průvodičem za jednotku času je co do velikosti rovna velikosti vektoru $\boldsymbol{w}$, který je na ni kolmý

$$\boldsymbol{w} = \frac{1}{2}\boldsymbol{r}_i \times \boldsymbol{v}_i = \mathrm{konst}\,,$$

kde $\boldsymbol{r}_i$ je průvodič tělesa (vektor z ohniska elipsy do daného tělesa) a $\boldsymbol{v}_i$ je jeho rychlost. Speciálně ve vrcholech elipsy (pericentru a apocentru) pak závislost přejde na jednoduché násobení. Navíc, pokud nás zajímá pouze porovnání rychlostí pohybu oběžnice v pericentru a apocentru, můžeme psát

$$r_\mathrm{p} v_\mathrm{p} = r_\mathrm{a} v_\mathrm{a}\,.$$

Zákon zachování energie

Na ZZ energie se můžeme dívat také jako na zobecnění ZZ hmotnosti. Energie, na rozdíl od hybnosti či momentu hybnosti, může být i nějakým způsobem skrytá. Tím myslíme to, že existuje potenciální energie, která je „schovaná“ v mikroskopických měřítcích hmoty. Vyjmenujme si alespoň základní typy, se kterými se často setkáváme:

- Kinetická energie translačního pohybu $E_\mathrm{k} = \frac{1}{2}mv^2$, kde m je hmotnost tělesa a v jeho rychlost.
- Kinetická energie rotačního pohybu $E_\mathrm{rot} = \frac{1}{2}J\omega^2$, kde J je moment setrvačnosti tělesa vůči nějaké ose a ω je úhlová rychlost vůči dané ose.
- Práce $W = \boldsymbol{F} \cdot \boldsymbol{s}$, kde $\boldsymbol{F}$ je síla působící po dráze $\boldsymbol{s}$ a $\cdot$ značí skalární součin. Pokud úhel mezi $\boldsymbol{F}$ a $\boldsymbol{s}$ označíme α, platí $W = Fs\cos\alpha$.
- Polohová potenciální energie v homogenním tíhovém poli $E_\mathrm{g} = mgh$, kde g je tíhové zrychlení a h je výška měřená nad nějakou dohodnutou hladinou, vzhledem ke které tuto energii počítáme.
- Polohová potenciální energie v radiálním gravitačním poli $E_\mathrm{G} = -G\frac{mM}{r}$, kde m je hmotnost jednoho tělesa v gravitačním poli toho druhého s hmotností M a r je vzdálenost jejich těžišť. Může se jednat o hmotné body či objekty se sféricky symetricky rozloženou hustotou. V tomto případě je jako nulová hladina zvolena nekonečná vzdálenost středů r.
- Polohová potenciální energie v elektrickém poli $E_\mathrm{el} = \frac{1}{4\pi\varepsilon}\frac{qQ}{r}$, kde q je náboj jednoho tělesa v elektrostatickém poli toho druhého s nábojem Q a r je opět vzdálenost jejich středů. Opět musí jít o hmotné body nebo o sféricky symetricky rozložené náboje, které se nesmí

[2] Pokud toto není splněno, pak II. KZ zákon je buď pouze přibližný nebo není vůbec použitelný. Zajímavou soustavou jsou dva měsíce Saturnu – Epimetheus a Janus. Tyto si totiž v průběhu oběhu kolem Saturnu vyměňují své dráhy. Menší část momentu hybnosti soustavy si tak předávají. V tomto případě by platil zákon obvykle dostatečně přesně pro jejich střední hodnoty rychlosti a vzdálenosti. Situace, kdy se již přestává II. KZ používat, je například soustava, ve které máme jedno velmi hmotné těleso, druhé středně hmotné a jedno lehké, které je umístěno do Lagrangeova bodu L_1 či L_2. Oběh lehkého tělesa je pak řízen oběhem toho středně hmotného kolem centrálního velmi hmotného tělesa.

měnit.[3] Tato potenciální energie je kladná, protože náboje stejného znaménka se odpuzují. Nulová hladina je opět pro nekonečné r.
- Potenciální energie pružnosti $E_\mathrm{p} = \frac{1}{2}k\Delta u^2$, kde k je tuhost pružiny a $\Delta u = u - u_0$ je její prodloužení, resp. aktuální délka u bez klidové délky u_0.
- Klidová energie hmotného tělesa $E_0 = m_0c^2$, kde m_0 je klidová hmotnost tělesa a c je rychlost světla ve vakuu.
- Energie magnetického pole cívky $E_\mathrm{m} = \frac{1}{2}LI^2$, kde L je indukčnost cívky a I je elektrický proud jí procházející.
- Energie kondenzátoru $E_\mathrm{e} = \frac{1}{2}CU^2$, kde C je kapacita kondenzátoru a U je elektrické napětí.
- Teplo $Q = mc\Delta T$, kde m je hmotnost látky, c její měrná tepelná kapacita a ΔT je změna teploty. Také můžeme psát $C = mc$, kde C je tepelná kapacita tělesa.
- Vnitřní energie látky, například pro jednoatomový ideální plyn platí $U = \frac{3}{2}nRT$, kde n je látkové množství, R je molární plynová konstanta a T je termodynamická teplota. U dvouatomového ideálního plynu se pak konstanta $\frac{3}{2}$ změní na $\frac{5}{2}$.
- Energie kvanta záření $E_\mathrm{p} = h\nu$, kde h je Planckova konstanta a ν je frekvence fotonu.
- Energie elektrického a magnetického pole, energie elektromagnetického záření.
- Chemická energie vazeb v molekulách, ionizační energie prvků či excitační a deexcitační energie elektronů.
- Jaderná energie vazeb protonů a neutronů v jádrech, kvarků ve složitějších částicích a další formy energie.

U potenciální energie navíc platí, že její hodnota závisí na předem zvolené konstantě, které říkáme nulová hladina. Důležité je, že tato konstanta nijak neovlivňuje pohybové rovnice. Proto se ji snažíme zvolit tak, aby výsledný výraz byl co nejjednodušší.

ZZ mechanické energie pro ideální kapaliny má podobu Bernoulliho rovnice

$$p + \frac{1}{2}\varrho v^2 = \mathrm{konst}\,,$$

kde p je tlak v kapalině, ϱ je její hustota a v je rychlost jejího proudění.

Opět je potřeba si připomenout, že ZZ energie platí pouze pro uzavřené soustavy a že musíme uvažovat všechny formy energie. Při dokonale pružné srážce se energie zachovává. Nejprve se přemění na deformaci tělesa a pak se opět uvolní jako kinetická. Také v případě nepružné srážky se celková energie zachová. Část mechanické energie se však ztratí ve formě nevratné deformace obou těles nebo třeba ve formě zvuku.

Kinetická energie se často v průběhu pohybu disipuje, neboli se přeměňuje na zvuk, teplo apod. Ale v základních výpočtech je vhodné uvažovat, že se mechanická energie zachovává, protože tomu tak v rámci přesnosti výpočtu většinou je. To platí i pro většinu úloh na střední i vysoké škole.

[3] Pokud by nebyly rozmístěné pevně, tak se kvůli přitahování/odpuzování na svých koulích přerozdělí a koule budou následně polarizované. Navíc má smysl mluvit pouze o koulích či o kulových slupkách, protože pokud je náboj pohyblivý a je na jednom tělese, pak se rozmístí po jeho povrchu. Aby byla splněna sférická symetrie, pak musí jít o kouli či kulovou slupku. Navíc se náboje nesmí pohybovat, pak by to nebyla elektrostatika.

Maximální účinnost

Tématem, které s energií úzce souvisí, je, že nemůžeme mít stroj, který by měl vyšší jak 100 % účinnost. Důležitým výsledkem termodynamiky je, že pokud je teplota ohřívače $T_{\max}$ a teplota chladiče je $T_{\min}$, pak tepelným strojem nemůžeme přesáhnout účinnost tzv. Carnotova cyklu skládajícího se ze dvou adiabatických a dvou izotermických procesů, která je

$$\eta_{\max} = 1 - \frac{T_{\min}}{T_{\max}}\,.$$

Zákon zachování celkové pravděpodobnosti

Zajímavým ZZ, který se může zdát významně odlišným od ostatních, je ZZ celkové pravděpodobnosti. Současně se může zdát triviální, protože je to něco, co se dá považovat za logické a tak nějak zřejmé. Celkový součet pravděpodobností všech možností, které mohou nastat, je vždy roven 1. ZZ pravděpodobnosti využíváme v kvantové fyzice, ve statistické fyzice nebo v teorii her.

Zákon zachování elektrického náboje

Pokud je nám dobře známo, zatím nebylo nikdy pozorováno narušení ZZ elektrického náboje. Ten se zachovává při všech reakcích. Navíc jediné násobky, které má smysl používat, jsou třetiny elementárního náboje $e = 1{,}602\,176\,634 \cdot 10^{-16}$ C, protože kvarky mají náboje o velikosti právě třetiny či dvou třetin této hodnoty.

Neexistence magnetického náboje

Tento ZZ jsme zařadili možná trochu netradičně. Ale doposavad je to jeden z těch nejpevnějších a platí bez jakýchkoliv omezení. Oproti ZZ náboje je ještě silnější – nejenom, že se zachovává celkový magnetický náboj, ale dokonce je jeho hodnota nulová. Všechny siločáry magnetického pole jsou buď uzavřené, nebo směřují od nekonečna do nekonečna.

V literatuře je možné najít tzv. „magnetické množství“. Magnetismus je pak modelován pomocí rozmístění tohoto „magnetického množství“, které je ovšem ve formě dipólů – tedy vždy je kladná hodnota množství rozmístěna v blízkosti stejného záporného množství. Pro vybrané aplikace to může být vhodná aproximace, i když to není přesné řešení.

Zákony zachování a symetrie v mikrosvětě

Ve většině fyzikální dějů můžeme uvažovat, že probíhají stejně, pokud zaměníme znaménko náboje (C), tedy nahradíme částice za antičástice nebo zaměníme vývoj systému za jeho zrcadlový obraz (P), tedy otočíme paritu a nebo otočíme směr toku času (T). Při částicových experimentech se ale ukázalo, že tyto symetrie neplatí vždy. Konkrétně slabá interakce narušuje každou z těchto symetrií, když je uvažujeme jednotlivě. Kombinovaná symetrie CPT[4] se však, jak se zdá, zachovává vždy. To by mělo souviset s tím, že máme právě tři rodiny kvarků a leptonů.

V mikrosvětě pozorujeme zachovávání dalších typů „nábojů“ jako ZZ baryonového čísla, leptonového čísla, podivnosti, půvabu atd. Ale slabá interakce může některé z těchto „zákonů“ narušovat.

[4] Tedy tím myslíme, že provedeme všechny tři záměny najednou – náboje, parity i času.

Co entropie?

Entropie je veličina, která bývá nepřesně označována za míru neuspořádanosti systému. Možná o něco přesnější je považovat ji za určitou míru rozmazanosti systému. Protože čím jsou v systému ostřejší rozhraní, tím je vlastně uspořádanější, a tedy s nižší entropií. Tato veličina je zajímavá tím, že s časem v uzavřeném systému neklesá. Sice jsme na začátku zmiňovali, že „rozumné“ veličiny se zachovávají, ale pro entropii to neplatí. Další populární tvrzení je, že právě směr růstu entropie nám ukazuje šipku času.

Jaká je budoucnost zákonů zachování?

Mohlo by se zdát, že všechny základní ZZ známe. Ale těžko říct, jestli je to pravda. Už před časem si vědci mysleli, že většina fyziky je hotová věc a že je potřeba dořešit jenom pár detailů. Těchto pár detailů vedlo k rozvoji kvantové fyziky a teorie relativity. Jedním z hlavních cílů dnešní vědy je spojit tyto dvě teorie dohromady, abychom dostali co neúplnější popis vesmíru. Ale kdo ví, co nám další roky základního výzkumu přinesou?

V současnosti pokračují debaty nad tím, jestli platí ZZ informace. Už vůbec definice toho, co přesně informace je, jak může vzniknout a jak bychom si mohli představit její zničení, je zdaleka nad úroveň tohoto seriálu. Ale určitě je to zajímavé téma pro další výzkum. Populární verze jednoho pohledu na informaci je taková, že i když nějaké těleso „spadne“ do černé díry, tak se informace, kterou neslo, zachová na povrchu černé díry. Současně zvětšení plochy povrchu horizontu událostí černé díry má právě takovou velikost, která odpovídá dané informaci. Otázkou je, jestli se díky Hawkingově záření informace opět uvolní nebo jestli dojde k jejímu „smazání“.

Tipy pro řešení úloh

Fyzikální úloha je zpravidla systém o n neznámých. K jejich určení potřebujete právě n nezávislých rovnic. Pokud víme, že se nějaká fyzikální veličina zachovává, získali jsme tím jednu rovnici. Pokud zároveň dokážeme všechny zachovávající se veličiny vyjádřit bez přidání nové neznámé, jsme o krok blíže k vyřešení úlohy.

Například, uvažujme dokonale pružnou srážku dvou těles o známých hmotnostech a známých počátečních rychlostech. Zbývá určit výsledné rychlosti obou těles, což jsou dvě proměnné. Potřebujeme tak dvě rovnice – ZZ hybnosti a ZZ mechanické energie.

Užitečnost ZZ spočívá v tom, že se díky nim nemusíme zabývat průběhem děje. Stačí nám zajistit, aby daná veličina měla na začátku a na konci stejnou hodnotu – složité výpočty popisující, co se děje uprostřed, pak můžeme zcela vynechat.

Do této kategorie spadají úlohy typu určení, do jaké výšky vystoupá těleso, necháme-li ho bez tření klouzat po rampě ve tvaru dolního kopečku funkce sinus. Mohli bychom složitě počítat výslednice sil a řešit pohybové rovnice, ale jestliže nás zajímá pouze výsledná poloha tělesa, stačí použít ZZ potenciální tíhové energie.

V úvodu bylo zmíněno, že pokud se veličina v nezachovává, musí se buď ztrácet, nebo se hromadit. Dokážeme-li vyjádřit míru této změny za čas $\dot{v}$ (tečka označuje derivaci podle času), můžeme ZZ zobecnit do podoby

$$v_2 = v_1 + \int_1^2 \dot{v}\,\mathrm{d}t\,,$$

kde v_1, resp. v_2 je počáteční, resp. koncové množství dané veličiny. Předchozí příklad bychom mohli modifikovat o tření. To však závisí pouze na skalárním součinu tíhové síly, kterou těleso působí na podložku, a normály na podložku. Žádná z těchto veličin však nezávisí na čase, čili můžeme zavést zobecněnou potenciální energii, která bude brát v úvahu ztráty způsobené třením. V tomto případě se už nevyhneme integrování, ale stále nemusíme řešit pohybové rovnice.

V některých případech veličina zůstává konstantní proto, že co ze systému za nějaký čas zmizí, musí se v něm během stejné doby vytvořit. Tento princip je známý jako rovnice kontinuity a má široké uplatnění v úlohách z hydromechaniky a elektrostaticky. Typickým příkladem je odvození Coulombova zákona z Gaussova elektrostatického zákona – zachovávající se veličinou je intenzita elektrického pole, zdrojem je elektrický náboj a úbytkem je myšlen „tok" siločar přes okraje zvolené oblasti.

V informatických a matematických úlohách bývají ZZ označovány jako invarianty. Chytře zvolený invariant často vede k překvapivě snadnému řešení, jak ukazuje známá úloha se šachovnicí, ze které vyřízneme dva protější rohy. Přitom se ptáme, jestli je možné zbytek šachovnice dokonale pokrýt pomocí obdélníkových dlaždic, které zabírají vždy dvě sousední políčka. Invariantem je v tomto případě rozdíl zakrytých černých a bílých polí – snadno nahlédneme, že položení dlaždice tuto veličinu nezmění. Na počátku však má však hodnotu 0, protože ještě není nic zakryto. Stejnou hodnotu musí mít i na konci, jenže na naší upravené šachovnici je o dvě políčka jedné barvy méně než té druhé. Tím jsme dokázali, že hledané pokrytí neexistuje.

Závěr a upoutávka na příště

V tomto dílu seriálu jsme prošli základní zákony zachování v přírodě. Obecně bývají dobrým způsobem řešení úloh v uzavřených soustavách a díky nim můžeme vybrané parametry dopočítat velice rychle. Příští díl bude věnovaný elektrickým obvodům, sítím a také elektrostatice. Zabrousíme ale i do nekonečných problémů, jejichž řešení může být daleko přímočařejší a rychlejší než u těch konečných.

Fyzikální korespondenční seminář je organizován studenty MFF UK. Je zastřešen Oddělením propagace a mediální komunikace MFF UK a podporován Ústavem teoretické fyziky MFF UK, jeho zaměstnanci a Jednotou českých matematiků a fyziků.

Toto dílo je šířeno pod licencí Creative Commons Attribution-Share Alike 3.0 Unported.
Pro zobrazení kopie této licence navštivte `http://creativecommons.org/licenses/by-sa/3.0/`.