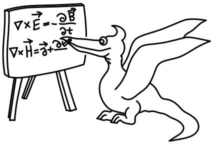


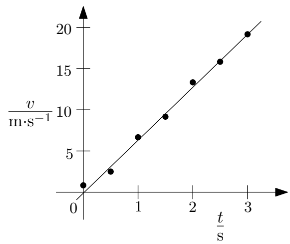
Seriál: Grafy, symetrie a souřadnice

Úvod

Minule jsme si probrali nějaké záležitosti kolem jednotek, formálních stránek řešení fyzikálních úloh a jejich zápisu. Věříme, že se budete snažit mít na paměti to, že i formální stránka řešení je důležitá a někdy i díky ní můžete snadněji odhalit chyby. V tomto díle se zmíníme o nějakých tématech, která se týkají grafických řešení úloh, symetrií a souřadnic. Každé z těchto témat je samo o sobě velice obsáhlé, a proto zde naleznete pouze spíše takové ochutnávky.

Grafy a grafická řešení

U grafů bychom mohli pokračovat s formální stránkou řešení. Ve stručnosti jenom poznamenejme, že do grafů chceme vynášet hodnoty na číselnou osu. Musíme tedy hodnotu veličiny vydělit vhodnou jednotkou, abychom mohli do grafu uvést bezrozměrnou veličinu. Další pravidla se pak týkají spíše experimentů. Naměřené hodnoty obvykle nespojujeme čarou, ale prokládáme fitem, který co nejlépe odpovídá datům. V případě výrazných chyb měření jednotlivých bodů bychom neměli zapomínat na chybové úsečky. Pokud jsou chyby měření srovnatelné s rozměrem znázornění bodu v grafu či dokonce menší, pak je uvádět nutně nemusíme. Ukázku co nejjednoduššího, ale ještě rozumně vypadajícího grafu vidíte na obrázku 1.



Obr. 1: Ukázka jednoduchého grafu, který má nejnutnější prvky.

Plocha pod grafem funkce

Pokročilejší z vás jistě vědí, že plochu pod funkcí můžeme počítat pomocí integrálu. Nicméně integrování je často těžké a není od věci si připomenout (nebo naučit se) i jiné základní postupy. Zmiňme ty, které můžeme používat, pokud máme zadanou funkci nebo k dispozici její graf.

Barvení

První ze základních možností, jak určit plochu, je ji prostě nějak přímočaře změřit. Můžeme si pod či přes graf dát čtvercovou síť a spočítat čtverečky pod plochou grafu k celkovému počtu čtverečků. Téměř jistě budou nějaké čtverečky proťaté, a tak se musíme rozhodnout, jak budeme „zaokrouhlovat“ čtverečky. Přesnější bývá odhadovat, jaká plocha je obarvená v částečně obarveném čtverečku, a kombinovat čtverečky mezi sebou tak, aby vytvořily celé jednotkové čtverečky. Pro větší přesnost je vhodnější brát menší čtverečky, ale „ručně“ je počítat je pak pracné. Pokud můžeme využít počítač, je vhodné počítat jednotlivé pixely pomocí nějakého programu. Pokud je černobílý obrázek v nějaké kompresi dat a má dovolenou celou barevnou paletu, tak na rozhraních černé a bílé se setkáte s různými odstíny šedi. Pak musíte zvolit, podobně jako u ručního počítání čtverečků, postup, který vám dá plochu rozumně přesně. U této metody navíc není nutné mít funkce, můžeme určovat i pokrytí obrázku vybranou barvou, jak si vyzkoušíte v řešení části seriálové úlohy.

Sčítání sloupců až k integraci

Plochu si můžeme rozdělit i jiným způsobem. Interval, na kterém chceme spočítat plochu pod grafem funkce, si můžeme rozdělit na menší intervaly. V těchto intervalech pak můžeme považovat funkci za konstantní a počítat plochy obdélníčků pod funkcí, nad funkcí nebo můžeme spočítat obě varianty a vzít průměr. Alternativně můžeme uvažovat lichoběžníky, tedy předpokládat, že funkce je na malých intervalech po částech lineární. Zjevně se zmenšováním intervalů (jemnější dělení) budeme dostávat přesnější a přesnější výsledek. Pokud nám stačí přibližný výsledek a nepříliš divoké funkce, pak je často dostatečné i hrubé dělení. Když se funkce více mění v nějaké části a v jiných částech je téměř konstantní, pak je vhodné zjemnit dělení oblasti s proměnlivějším průběhem funkce a pro zbylé intervaly ponechat hrubé dělení. Pokud s dělením pokračujeme dále a dále a intervaly stále zmenšujeme, dostáváme se k integraci.

Pravděpodobnostní řešení, numerické metody

Těm, kdo to slyší poprvé, se to může zdát trochu nedůvěryhodné, možná až bláznivé. Vědci však velice často u velmi složitých výpočtů komplikovaných integrálů (tedy stále myslíme plochy pod grafem) využívají pravděpodobnostní metody. Známou metodou je Monte Carlo, kde, podobně jako v kasinu, náhodně sázíme na kombinaci čísel v prostoru (N čísel v N-dimenzionálním prostoru) a díváme se, jestli je hodnota pod nebo nad grafem.

Numerickým metodám se podrobně věnovaly například seriály FYKOSu v 21. ročníku (o počítačové fyzice) a 31. ročníku (o numerických metodách a počítačových simulacích).

Tip k řešení soutěží

Představme si situaci, že máte vyřešit úlohu FO s kruhovým dějem v plynu a z nějakého důvodu jste se totálně zasekli – nemůžete přijít na parametry jednoho bodu z daného cyklu. Pak není nic lepšího, než si tyto parametry pomocí pravítka odhadnout z grafu (pokud jste ho dostali se zadáním). S největší pravděpodobností nedostanete plný počet bodů, ale lepší něco nežli než nic.

Statika

Pokud řešíme například zatížení jednotlivých částí mostních konstrukcí, pak využíváme statiku. Tedy víme, že aby se most nezačal někam pohybovat či lámat, musí být výslednice sil nulová. Graficky si nulovost výslednice sil v bodě můžeme znázornit tak, že poskládáme za sebe vektory jednotlivých sil působících v daném bodě tak, že vytvoří uzavřenou křivku. Někdy se může hodit, že i momenty sil se musí vyrušit, aby se nám most nezačal otáčet. Obě pravidla navíc platí pro každé místo konstrukce a obvykle sestavujeme rovnice pro jednotlivé body upevnění. Ukázkou úlohy, ve které se řeší stabilita mostní konstrukce, je 26-IV-5 – stavme mosty.[1] Další úloha, která se řešila pomocí statiky, je například 20-VI-I – tři válce děda vševěda,[2] kde byly dva válce položené na podložce a na nich umístěn třetí válec. Příkladem toho, kde se ukázalo, že za zadaných podmínek nemůže být soustava nikdy stabilní, jsou koule a válec z úlohy 19-III-1 – dotyk koule a válce.[3]

[1] https://fykos.cz/_media/rocnik26/ulohy/pdf/uloha26_4_5.pdf
[2] https://fykos.cz/_media/rocnik20/ulohy/pdf/uloha20_6_1.pdf
[3] https://fykos.cz/_media/rocnik19/ulohy/pdf/uloha19_3_1.pdf

Optické zobrazování

Grafické zpracování se často využívá při úlohách o zobrazování pomocí optických soustav. Tímto tématem se podrobněji zabývá text z knihovničky FO.[4] Podobná pravidla platí jak pro zrcadla, tak pro tenké čočky. Rozdíl mezi spojkami (dutými zrcadly) a rozptylkami (vypuklými zrcadly) je v umístění reálného ohniska. Popišme význačné paprsky u dutého zrcadla:

- Paprsek směřující na vrchol zrcadla[5] se odrazí pod stejným úhlem (jako dopadl) na opačnou stranu optické osy.
- Paprsek, který jde rovnoběžně s optickou osou, se od zrcadla odráží do ohniska.
- Paprsek, který prošel skrz ohnisko, se odrazí od zrcadla tak, že jde rovnoběžně s optickou osou.

Pro sestavení pozice obrazu nám však stačí vždy dva paprsky a dostatečně pečlivé rýsování. Samozřejmě bychom mohli rýsovat i jiné, za dodržení zákonu odrazu. Zmíněné význačné paprsky se ale rýsují asi nejjednoduševji. Dobrým trikem pro malé vzory, které máte zobrazit, může být zvětšit si vzor. Pozor ale na to, že zvětšení[6] musíte provést směrem kolmo na optickou osu. Pokud jste původní výšku vzoru zvětšili N-krát, musíte výsledek zmenšit na $1/N$-tinu. Někdy se také může při rýsování hodit, že chod paprsků můžete obrátit. Při řešení soutěží, kde se požaduje jen výsledek, je často dokonce rychlejší si danou situaci narýsovat v nějakém dynamickém geometrickém programu.

Symetrie

Symetrie je to, co při řešení fyzikálního problému obvykle chceme najít, protože nám to značně zjednoduší jeho řešení. Někdy dostaneme výsledek ve srovnání s jiným postupem skoro okamžitě a výrazně méně pracně. Některé fyzikální úlohy mají analytické řešení jenom díky symetrii.

Vztah symetrie a zákonů zachování

Každá symetrie se pojí s nějakým zákonem zachování. To plyne z teorému Emmy Noetherové. Jeho matematická formulace je složitá, nicméně tato poučka se nám může hodit i na SŠ úrovni. Vztahy mezi základními symetriemi a zákony zachování jsou:

- Symetrie v posunutí v prostoru je spojena se zákonem zachování hybnosti.
- Symetrie v otočení se pojí se zákonem zachování momentu hybnosti.
- Symetrie v posunutí v čase se pojí se zákonem zachování energie.

Princip superpozice

Princip superpozice můžeme využít v mnoha fyzikálních situacích, kdy celkové působení více „zdrojů“ na nějakou testovací částici[7] můžeme jednoduše sečíst. To platí například u gravitačního pole. Celkové zrychlení asteroidu je dáno zrychleními od jednotlivých hmotných těles.[8] Stejně tak platí, že intenzita elektromagnetického pole v daném místě je dána součtem intenzit od jednotlivých zdrojů. Tento princip můžeme využít i opačně. Příkladem může být otázka,

[4] Trnka, J.: Zobrazení čočkami, dostupné na `http://fyzikalniolympiada.cz/texty/cocky.pdf`

[5] tedy na místo, kde se protíná profil zrcadla s optickou osou

[6] Přesněji řečeno byste měli aplikovat pravoúhlou afinitu.

[7] Testovací částice je taková, která nám nenaruší původní rozložení zdrojů.

[8] Za předpokladu, že můžeme zanedbat negravitační vlivy. Což by například u malých částic uvolňujících se z komet vedlo k velice nepřesným výsledkům. Ty jsou totiž výrazně ovlivněny jak slunečním větrem, tak následně odpařováním materiálu z jejich povrchu.

jakou intenzitu elektrického pole naměříme uprostřed kruhu, na kterém je rovnoměrně rozmístěno N kladných nábojů, kde $N \geq 2$. Je zřejmé, že v případě sudého počtu nábojů se intenzity protilehlých nábojů vyruší. Stejný výsledek bychom obdrželi při součtu lichého počtu nábojů. Intenzita z takového rozložení nábojů bude tedy vždy nulová. Pokud jeden kladný náboj odebereme, pak je to pro střed stejné, jako kdybychom v prázdném prostoru umístili jeden záporný náboj do místa, odkud jsme náboj odebrali.

Další metody založené na symetrii

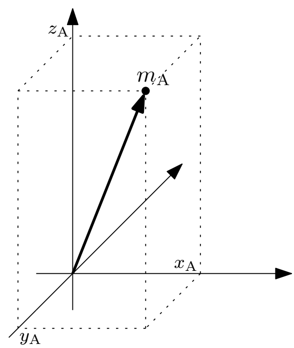
Dalšími metodami, které využívají vysoké symetrie nějakých fyzikálních úloh, jsou zrcadlový náboj a Gaussův zákon. Obě se uplatňují v elektrostatice a zmíníme je alespoň trochu v čtvrtém dílu seriálu.

Souřadnice

Souřadnice, které jsou vhodné pro řešení fyzikálních problémů, se často pojí právě se symetrií našeho problému. Abychom byli co nejefektivnější v řešení, měli bychom si zvolit soustavu souřadnic, která nám vyhovuje.

Základním pravidlem, které souřadnice musí splňovat, je, že jich musí být právě tolik, kolik dimenzí má prostor, v němž se pohybujeme. Nejčastěji se tedy jedná o dvou- či třídimenzionální souřadnice. Aby mohla být určena poloha všech bodů z našeho prostoru jednoznačně,[9] musí být souřadnice na sebe kolmé

Nejznámějšími souřadnicemi využívanými pro lepší představení situace jsou **kartézské souřadnice**. Ty jsou obvykle jedno- až třídimenzionální a jde o udání pozice pomocí souřadnic, které obvykle označujeme x, y a z. Ukázka jejich znázornění je na obrázku 2. Vzdálenost dvou bodů[10] A a B pak můžeme určit jako $D = \sqrt{(x_\mathrm{B} - x_\mathrm{A})^2 + (y_\mathrm{B} - y_\mathrm{A})^2 + (z_\mathrm{B} - z_\mathrm{A})^2}$.



Obr. 2: Ukázka kartézských souřadnic v 3D.

Těžišťová soustava

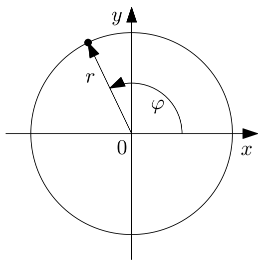
Těžišťová soustava je kartézská soustava souřadná, která je spojená s těžištěm všech (či vybraných) bodů umístěných v naší soustavě. Často ji využíváme, aby nám zbytečně hmotné body „neulétávaly“ společně nějakým preferovaným směrem. Zajímavá fyzika se obvykle děje až v rámci interakce bodů mezi sebou.

Pokud řešíme centrální srážku dvou těles v těžišťové soustavě, tak je zde jejich celková hybnost stále nulová. Obě mají opačné hybnosti stejných velikostí a po srážce se akorát otočí jejich rychlosti. Jediný drobný problém je, že pokud chceme výsledek v laboratorní soustavě, je potřeba provést transformaci z jedné soustavy do druhé.

[9] Podmínku jednoznačnosti umíme za jistých předpokladů splnit i bez potřeby kolmých souřadnic. Má to však za následek značnou komplikaci všech výpočtů a my se tomu věnovat nebudeme.
[10] Označení bodů budeme vkládat do indexů a podle toho poznáme, o souřadnici jakého bodu jde.

Polární souřadnice

Polární souřadnice jsou 2D a jsou určené vzdáleností od počátku $r = \sqrt{x^2 + y^2}$ a orientovaným úhlem $\varphi = \operatorname{arctg} \cdot (y; x)$ měřeným od kladné části osy x v kladném smyslu (proti směru hodinových ručiček, viz obr. 3).[11] Výhodou těchto souřadnic může být to, že je můžeme využít i pro tvorbu grafů, které nejsou funkce, ale jde například o postupně se odvíjející spirály. Pokud jde ale například o kružnici, pak úhel obvykle uvažujeme v intervalu $\varphi \in [0; 2\pi)$. Kružnici o poloměru r v počátku soustavy souřadnic můžeme výhodně popsat pomocí transformačních vztahů $x = r\cos\varphi$ a $y = r\sin\varphi$, což je i transformační vztah mezi souřadnicemi. Vzdálenost mezi dvěma body A a B za pomoci těchto souřadnic určíme jako $D = \sqrt{r_\mathrm{A}^2 + r_\mathrm{B}^2 - 2r_\mathrm{A}r_\mathrm{B}\cos(\varphi_\mathrm{A} - \varphi_\mathrm{B})}$.



Obr. 3: Grafické znázornění polárních souřadnic.

Válcové souřadnice

Válcové souřadnice jsou vlastně polární souřadnice, které rozšíříme do prostoru tak, že je doplníme o třetí kartézskou souřadnici z. Transformační vztahy jsou stejné jako u polárních souřadnic. Vzdálenost dvou bodů je $D = \sqrt{r_\mathrm{A}^2 + r_\mathrm{B}^2 - 2r_\mathrm{A}r_\mathrm{B}\cos(\varphi_\mathrm{A} - \varphi_\mathrm{B}) + (z_\mathrm{B} - z_\mathrm{A})^2}$.

Sférické souřadnice

Pokud chceme popisovat pohyb po kouli, je vhodné využít souřadnice sférické dané vzdáleností od počátku $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ a dvěma úhly. Úhel φ měříme stejným způsobem jako v polárních souřadnicích a to v rovině xy. Druhý úhel[12] ϑ pak měříme od kladného směru osy z. Transformace mají tvar $\varphi = \operatorname{arctg} \cdot (y/x)$, $\vartheta = \arccos(z/r)$. V opačném směru pak

$$
\begin{aligned}
x &= r\sin\vartheta\cos\varphi\,,\\
y &= r\sin\vartheta\sin\varphi\,,\\
z &= r\cos\vartheta\,.
\end{aligned}
$$

Vzdálenost dvou bodů se stává už docela komplikovaným výrazem, ale můžeme si ho napsat, abychom se přesvědčili, že na vzdálenosti bodů se docela hodí kartézská soustava souřadná

$$D = \sqrt{r_\mathrm{A}^2 + r_\mathrm{B}^2 - 2r_\mathrm{A}r_\mathrm{B}\left(\cos\vartheta_\mathrm{A}\cos\vartheta_\mathrm{B} + \cos(\varphi_\mathrm{B} - \varphi_\mathrm{A})\sin\vartheta_\mathrm{A}\sin\vartheta_\mathrm{B}\right)}\,.$$

Inerciální vs. neinerciální soustavy

Často se omezujeme na inerciální soustavy souřadné. Tedy takové, kde platí Newtonovy zákony bez úprav. Nicméně někdy může být vhodné přejít do neinerciální soustavy souřadné. Musíme však vždy mít na paměti, že na tělesa v neinerciálních soustavách působí setrvačné síly.

Prvním příkladem úlohy, kde můžeme zvolit neinerciální souřadnice, může být soustava spojená se zrychleně se rozjíždějícím vlakem na vodorovné rovině v jedné přímce. Když se na

[11] $\varphi = \operatorname{arctg} \cdot (y; x)$ definujeme jako $\operatorname{arctg}(y/x)$ pro $x \geq 0$ a $y \geq 0$, $\operatorname{arctg}(y/x) + \pi$ pro $x \leq 0$, resp. $\operatorname{arctg}(y/x) + 2\pi$ pro $x \geq 0$ a $y \leq 0$.

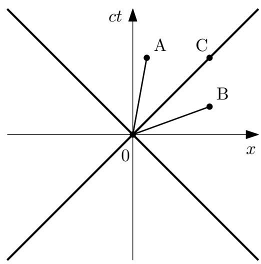
[12] Toto je jeden z možných způsobů, jak tyto souřadnice popsat. Existuje více variant, se kterými se můžete setkat v literatuře.

tento vlak díváme ze soustavy spojené se Zemí (považujme ji pro tento myšlenkový experiment za dostatečně dobře inerciální), pak vidíme, že osoby, co sedí na sedačkách, jsou urychlovány stejně jako zbytek vlaku. Pokud někdo položí kvádr na dokonale hladkou zem a pak se vlak začne rozjíždět, zůstane kvádr na stejném místě. Podívejme se na tuto situaci z jiného pohledu – z neinerciální soustavy spojené s vlakem. V tom případě vidíme, že jsou cestující víceméně v klidu. Ale oni sami pociťují, že jsou tlačeni do sedaček se zrychlením velikostně stejným se zrychlením vlaku. Pokud se podíváme na kvádr na podlaze, tak se nám může zdát, že se bezdůvodně rozjíždí do zadní části vlaku (pokud se vlak rozjíždí dopředu) se zrychlením odpovídajícím zrychlení vlaku.

Stejně tak můžeme přejít do rotující soustavy. Zde bude situace složitější než u lineárně zrychlující soustavy, protože se nám zde objeví členy odpovídající odstředivé a Coriolisově síle. Tato transformace se používá často například u problému tří těles, kde jsou dvě obíhající se tělesa, která jsou značně hmotná a třetí, které má vůči nim zanedbatelnou hmotnost. Pak se využije korotující systém, kde na hlavní ose jsou umístěna dvě hlavní tělesa. Pokud se obíhají po kruhových trajektoriích, pak jsou v této soustavě nehybná. Pokud se obíhají po eliptické trajektorii, pak se přechází ještě k o něco složitější soustavě, kde jsou opět nehybná a ve stejné vzdálenosti, ale mění se převod a síla, která na třetí těleso působí v jednotlivých bodech v závislosti na čase.

Minkowského prostoročas

Nakousněme alespoň letmo i něco ze speciální teorie relativity. Zde reprezentujeme pozici v prosotoročase[13] pomocí tří prostorových souřadnic a jedné časové. Časová souřadnice má ale speciální postavení. Jednak ji uvažujeme pronásobenou rychlostí světla, tedy *ct*. Druhým faktorem je, že ji můžeme brát buď jako imaginární nebo alespoň při určování prostoročasové vzdálenosti uvažujeme vzdálenost uraženou v tomto směru za zápornou. Místo prostorových bodů zde uvažujeme události – polohu v souřadnicích v určitém čase. Tedy vzdálenost je $D = \sqrt{(x_\mathrm{B}-x_\mathrm{A})^2+(y_\mathrm{B}-y_\mathrm{A})^2+(z_\mathrm{B}-z_\mathrm{A})^2-(ct_\mathrm{B}-ct_\mathrm{A})^2}$.



Obr. 4: Schematické znázornění Minkowského prostoročasu.

Když se podíváme na obrázek 4, tak vidíme události A, B a C. Velice zajímavá je událost C, která leží na ose kvadrantů – na tzv. světelném kuželu. Ten je tvořen událostmi, které jsou přesně v té vzdálenosti, kam se může dostat světlo či odkud k nám světlo mohlo dojít. Tato vzdálenost je zajímavá tím, že je v této metrice nulová. Tedy vzdálenost mezi počátkem a C je nula. Interval mezi počátkem soustavy souřadné, tedy tady a teď, s událostí A je záporný a tedy časupodobný. Hypoteticky se můžeme dostat do události A někdy v budoucnosti. Bod B je pak prostorupodobný. Kdybychom se transformovali do jiné soustavy souřadnic, tak by tato událost mohla proběhnout ve stejném čase jako má počátek souřadnic. Naopak událost A by mohla proběhnout v jiné soustavě souřadné na stejném místě, jako je počátek. Tyto záležitosti se nazývají relativitou současnosti a soumístnosti.

[13]Prý fyzikové říkají prostoročas a sci-fi autoři používají časoprostor. I když těžko říci, co na to jazyková logika, když se správně říká světločára.

Závěr a upoutávka na příště

Snad seriál dostatečně naznačil, že výběr souřadné soustavy je důležitý a někdy nám může usnadnit práci. Pro jejich správnou volbu je potřeba se vždy zamyslet nad symetriemi našeho problému a ty co nejvíce využít.

V příštím díle se chceme dále věnovat zákonům zachování, na které jsme už v tomto dílu trochu narazili. Zákony zachování se nám hodí prakticky vždy a často vedou na rychlé řešení problémů.

Fyzikální korespondenční seminář je organizován studenty MFF UK. Je zastřešen Oddělením propagace a mediální komunikace MFF UK a podporován Ústavem teoretické fyziky MFF UK, jeho zaměstnanci a Jednotou českých matematiků a fyziků.