Úloha VI.P ... dálničně-bezpečnostní problém

10 bodů; průměr 4,00; řešilo 14 studentů

- *Kolik aut musí projet za jednotku času po silnici či dálnici, aby byla silnice pod auty suchá, pokud prší?*
- *Kolik aut musí projet za jednotku času po silnici či dálnici, aby na silnici nebyl žádný sníh a led, pokud sněží? Teplota dopadajícího sněhu je konstantní a srovnatelná s okolím, několik málo* K *pod* 0 °C.

Uvažujte, že prší nebo sněží nějaký konstantní objem vody na jednotku plochy za jednotku času.

Karel jel po dálnici.

Nejdříve si zaveďme veličinu q, udávající, kolik metrů vody naprší za jednu sekundu. Samozřejmě předpokládáme, že voda padá zcela spojitě a rovnoměrně. Jistě můžeme najít takovou hodnotu q_0, pro kterou se veškerá dopadající voda ihned vypaří. Velkou roli zde hraje vlhkost a teplota vzduchu a také fakt, že projíždějící auta způsobují pohyb vzduchu v okolí vozovky.

Dále musíme vytvořit model interakce aut s padající vodou. Část padající vody, do které narazí předek auta, se odrazí do stran a zbytek se odrazí na střechu. Nějaká voda ze střechy steče na strany auta a zbytek steče za auto.

Nechť mají všechna auta výšku h a délku l, pohybují se rychlostí u a za sekundu jich libovolným bodem silnice projede f. Tuto veličinu můžeme označit jako frekvenci projíždějících aut, její převrácená hodnota pak bude perioda T. Na vozovku může pršet maximálně q_0 vody, což je ale velmi malé množství vody, takže většina vody musí být zachycena projíždějícími auty. Můžeme si to představit tak, že než libovolná kapka urazí vzdálenost h, projede daným bodem silnice nějaké auto.

K dešti se samozřejmě přidává voda, která stéká ze střech aut, jak jsme zmínili výše. Ta však bude padat mnohem menší rychlostí, než dešťové kapky, a proto musí stejně jako ony vždy narazit do projíždějících aut. Veškerá voda, která narazí do aut, se tak buď odrazí na stranu, nebo za auta – ale voda odražená za opět narazí do dalšího auta, kde se celý proces opakuje. Ve výsledku je to stejné, jako by se veškerá voda dopadající na auta odrazila na stranu.

Pojďme předchozí úvahy vyjádřit pomocí rovnic. Mezi zadním koncem jednoho auta a předním koncem následujícího auta je vzdálenost

$$x = uT - l\,,$$

kterou projíždějící auta urazí za čas

$$t = \frac{x}{u} = T - \frac{l}{u}\,.$$

Padající déšť urazí vzdálenost výšky auta za čas

$$\tau = \frac{h}{v}\,.$$

Předpokládejme, že auta mají takový vhodný tvar, že veškerá voda, do které svým předkem narazí, se buď rozstříkne do stran a nebo začne vlivem proudění vzduchu stoupat na střechu vozu. Z toho vyplývá, že za každou periodu T dopadne na vozovku $q\,(t-\tau)$ deště. Celkový dopad vody na vozovku tak je

$$q_{\mathrm{v}} = q\frac{(t-\tau)}{T} = q\left(1 - f\left(\frac{l}{u} + \frac{h}{v}\right)\right)\,.$$

Jak jsme odvodili výše, tato hodnota se musí rovnat maximálnímu přípustnému dopadu q_0. V zadání se nás ptají na frekvenci projíždějících aut, jejíž vyjádření je už snadné

$$f = \frac{q - q_0}{q} \left(\frac{l}{u} + \frac{h}{v} \right)^{-1} .$$

Všechny neznámé samozřejmě záleží na situaci, ale obecně by je neměl být problém změřit či odhadnout. Výjimku představuje hodnota q_0, ale zde se nedopustíme nijak velké chyby (v porovnání s nepřesnostmi odhadů ostatních veličin), pokud budeme předpokládat $q_0 \approx 0$. Potom už výsledek zřejmě nebude záviset na vydatnosti deště. Dosazením nějakých rozumných hodnot ($u = 130\,\mathrm{km{\cdot}h^{-1}}$, $v = 9\,\mathrm{m{\cdot}s^{-1}}$, $l = 3\,\mathrm{m}$ a $h = 1{,}5\,\mathrm{m}$) dostáváme $f = 4\,\mathrm{Hz}$. Toto číslo vůbec neodpovídá běžnému provozu, kde je typická frekvence několikrát nižší. Je však pravda, že jsme dosadili horní hranici rychlosti dešťových kapek, při nižších rychlostech bychom se už mohli dostat na frekvence, kterými se na dálnici běžně jezdí.

Dále se můžeme bavit například o tom, že proudění vzduchu způsobuje, že část vody z boků automobilů bude sklouzávat na vozovku za ně. V úvahu připadá také spousta dalších jevů a nepřesností našeho modelu. Je však rozumné předpokládat, že všechny tyto drobné nedostatky se dají opravit vhodnou volbou konstant.

Co se nedá opravit je například fakt, že auta rozhodně nejezdí se stálou frekvencí. Námi spočítaná frekvence je nejmenší frekvence, při které ještě zem zůstane suchá. Její převrácená hodnota představuje největší možnou periodu mezi auty, při které na zem nedopadne ani kapka. Museli bychom tedy zajistit, aby všechny časové rozestupy mezi auty byly menší. K tomu bychom potřebovali znát rozdělení period (lze očekávat, že to bude normální rozdělení), a především jeho parametry. Odtud bychom už snadno (integrálem) spočítali závislost množství vody, co dopadne na vozovku, na parametrech daného rozdělení.

Sněží

Na vozovce jistě nebude sníh, pokud tam ani žádný nedopadne. Můžeme tak použít výsledky předchozí části s tím rozdílem, že sníh zřejmě padá výrazně pomaleji, než déšť. Pokud tedy najdeme frekvenci, při které na silnici neprší, rozhodně při ní ani nebude sněžit. Dále, sněhové vločky, padající ze střechy auta, se velmi brzy urychlí na terminální rychlost a potom budou padat stejně rychle jako nově padající sníh. Díky tomu část ze sněhu, který dopadne na auta, nezmizí do stran, ale opět začne padat na vozovku.

Počáteční vydatnost sněžení budeme značit jako u deště q. V okolí automobilů však bude vyšší, a sice q_s, protože přičítáme ještě část sněhu (označme jí k), dopadajícího na auta. Na vozovku dopadá q_v, které jsme odvodili výše (akorát musíme v rovnici místo q použít q_s, protože to je množství sněhu, padajícího v okolí aut). Na auta tak dopadá

$$q_\mathrm{a} = q_\mathrm{s} - q_\mathrm{v} ,$$

přičemž platí

$$q_\mathrm{s} = q + kq_\mathrm{a} .$$

Dosazením první rovnice do druhé dostáváme

$$q_\mathrm{s} = q + k\left(q_\mathrm{s} - q_\mathrm{v}\right) ,$$

$$q_\mathrm{s} = q + kq_\mathrm{s} - kq_\mathrm{s}\left(1 - f\left(\frac{l}{u} + \frac{h}{v}\right)\right) ,$$

$$q_\mathrm{s} = q\left(1 - kf\left(\frac{l}{u} + \frac{h}{v}\right)\right)^{-1} .$$

Celkové množství sněhu, dopadajícího na vozovku, tak je

$$q_\mathrm{v} = q_\mathrm{s}\left(1 - f\left(\frac{l}{u} + \frac{h}{v}\right)\right) = q\frac{1 - f\left(\frac{l}{u} + \frac{h}{v}\right)}{1 - kf\left(\frac{l}{u} + \frac{h}{v}\right)} .$$

Dosazením $k = 1$ dostáváme[1], že $q_\mathrm{v} = q$, tedy že veškerý sníh dříve či později dopadne na vozovku. Ve skutečnosti bude k samozřejmě menší než 1, takže q_v bude o něco nižší než q.

Nakonec ještě můžeme spočítat, kolik sněhu se díky projíždějícím autům rozpustí. Předpokládejme, že každé auto má stejný výkon P_0. Otázkou je, jaká část tohoto výkonu se použije na tavení sněhu. Toto není vůbec snadné spočítat (v úvahu připadá ohromné množství vlivů, které bychom museli do výpočtu zahrnout), proto řekněme, že každé auto k tavení sněhu přispěje výkonem P, jehož hodnotu už nějak změříme.

Časové rozestupy mezi auty jsou T. To znamená, že každý úsek silnice o délce uT „vytápí“ jedno auto. Měrné skupenské teplo tání sněhu je $l_\mathrm{t} = 334\,\mathrm{kJ{\cdot}kg^{-1}}$ a protože už máme obsazené písmenko T, které běžně patří termodynamické teplotě, předpokládejme že teplota sněhu je přesně $0\,^\circ\mathrm{C}$. Potom jedno auto za čas t roztaví hmotnost sněhu

$$m = \frac{Pt}{l_\mathrm{t}} .$$

Nyní si definujme šířku jednoho auta s. Z hustoty sněhu $\varrho = 200\,\mathrm{kg{\cdot}m^{-3}}$ spočítáme, že hmotnost m odpovídá množství sněhu

$$q_0 = \frac{m}{uTst\varrho} = \frac{P}{uTs\varrho l_\mathrm{t}} = \frac{Pf}{us\varrho l_\mathrm{t}} .$$

Projíždějící auta tedy roztaví q_0 dopadajícího sněhu. Pro výkon běžného auta $P = 100\,\mathrm{kW}$ se šířkou $s = 2\,\mathrm{m}$ a frekvenci $f = 1\,\mathrm{Hz}$ máme odhad $q_0 \approx 2\cdot 10^{-5}\,\mathrm{m{\cdot}s^{-1}} = 7\,\mathrm{cm{\cdot}h^{-1}}$.

Pokud bychom chtěli potřebnou frekvenci spočítat, dosazením $q_0 = q_\mathrm{v}$ dostáváme

$$\frac{Pf}{us\varrho l_\mathrm{t}} = q\frac{1 - f\left(\frac{l}{u} + \frac{h}{v}\right)}{1 - kf\left(\frac{l}{u} + \frac{h}{v}\right)} ,$$

což je vlastně kvadratická rovnice

$$Pk\left(\frac{l}{u} + \frac{h}{v}\right)f^2 - \left(P + qus\varrho l_\mathrm{t}\left(\frac{l}{u} + \frac{h}{v}\right)\right)f + qus\varrho l_\mathrm{t} = 0 .$$

Nás zajímá kořen s $-$, tedy nejnižší frekvence, při které bude vozovka bez sněhu. Mohlo by se zdát, že kořen s $+$ představuje nejvyšší frekvenci, při které ještě stihne roztát všechno, co

[1] Což by odpovídalo situaci, ve které by veškerý sníh, dopadající na auta, časem opět začal padat na vozovku za auty. Jinak řečeno, žádný sníh by nepadal do stran.

nasněží a že tedy pro vyšší frekvence se už na silnici začne opět hromadit sníh. Tyto frekvence však nemají fyzikální význam, protože jsou vyšší, než maximální možná frekvence aut na silnici. Tu můžeme určit z délky a rychlosti aut jako

$$f_{\max} = \frac{u}{l}\,.$$

Rychlost padajícího sněhu bude zřejmě menší než rychlost vodních kapek v dešti, uvažujme tedy $v = 1\,\mathrm{m\cdot s^{-1}}$. Nechť sněží vydatně $q = 3\,\mathrm{cm\cdot h^{-1}}$, potom vychází přibližně $f \doteq 0{,}4\,\mathrm{Hz}$, což je pořád trochu moc. Snížíme-li ale vydatnost sněžení na $1\,\mathrm{cm\cdot h^{-1}}$, dostaneme se k hodnotám frekvence $0{,}12\,\mathrm{Hz}$, což už vypadá realisticky.

Jáchym Bártík
tuaki@fykos.cz

Fyzikální korespondenční seminář je organizován studenty MFF UK. Je zastřešen Oddělením propagace a mediální komunikace MFF UK a podporován Ústavem teoretické fyziky MFF UK, jeho zaměstnanci a Jednotou českých matematiků a fyziků.