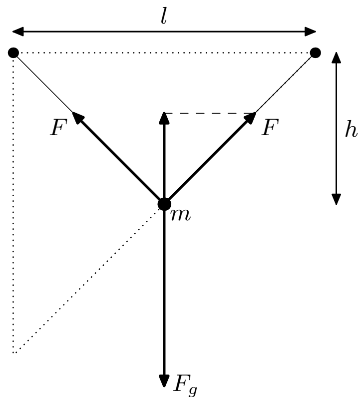
Úloha VI.5 ... gumová houpačka

9 bodů; průměr 5,91; řešilo 23 studentů

Matěje začaly nudit klasické houpačky, které jsou na dětských hřištích a lze se na nich houpat pouze dopředu a dozadu. Proto vymyslel vlastní atrakci, na které se bude houpat nahoru a dolů. Mezi dva stejně vysoké body ve vzdálenosti l natáhne gumu s klidovou délkou l. Následně se pomalu posadí přesně doprostřed gumy, přičemž se její střed vychýlí dolů o vzdálenost h. Nyní se velmi lehce odstrčí směrem nahoru a začne se houpat. Určete periodu malých kmitů.

Matěj přemýšlí, jak zranit děti na hřištích.



Obr. 1: Schéma gumové houpačky

Výpočet hmotnosti

Abychom mohli sestavit pohybovou rovnici, potřebujeme znát Matějovu hmotnost. Tu si můžeme dopočítat z tuhosti gumy k a ze zadaných údajů, jelikož víme, jak hluboko se houpačka prohnula. S použitím Pythagorovy věty lze spočítat, že pokud se střed gumy posunul o h dolů, zvětšila se její celková délka na $\sqrt{l^2+4h^2}$ (přepona tečkovaného trojúhelníka na obrázku 1). Guma je napínána silou

$$F = k\left(\sqrt{l^2+4h^2} - l\right) . \tag{1}$$

Tato síla působí ve směru gumy. V bodě, kde sedí Matěj, se mění její směr o určitý úhel. Síly F na Matěje působí dvě (jedna z každého směru), přičemž je nadnášen pouze jejich svislými složkami. Jejich součtem je

$$F_y = 2F\frac{2h}{\sqrt{l^2+4h^2}} = \frac{4hk}{\sqrt{l^2+4h^2}}\left(\sqrt{l^2+4h^2} - l\right) = 4hk\left(1 - \frac{l}{\sqrt{l^2+4h^2}}\right) , \tag{2}$$

kde $\frac{2h}{\sqrt{l^2+4h^2}}$ je kosinus úhlu, který svírají obě síly F se svislicí, a za F jsme dosadili ze vztahu (1). Tuto sílu položíme rovnu tíhové síle mg, odkud pro Matějovu hmotnost dostáváme

$$m = \frac{4hk}{g}\left(1 - \frac{l}{\sqrt{l^2+4h^2}}\right) .$$

Výpočet periody

Když se Matěj odrazí o kousek nahoru, síla gumiček bude menší než tíhová síla a Matěj začne zrychlovat zpět k zemi. Po průchodu rovnovážnou polohou se gumičky natáhnou více, čímž ho znovu vytáhnou nahoru. Proto bude oscilovat tam a zpět.

Hledáme závislost síly F_y na výchylce z rovnovážné polohy y. Vzdálenost h v rovnici (2) může být obecně libovolná a vzorec bude stále platný. Místo zadané hodnoty h tak můžeme dosadit souřadnici $h + \Delta h$, čímž dostaneme

$$F_y = 4\left(h + \Delta h\right) k \left(1 - \frac{l}{\sqrt{l^2 + 4\left(h + \Delta h\right)^2}}\right) .$$

Nyní označme $y = -\Delta h$, což je svislá souřadnice udávající Matějovu výchylku z rovnovážné polohy

$$F_y = 4\left(h - y\right) k \left(1 - \frac{l}{\sqrt{l^2 + 4\left(h - y\right)^2}}\right) .$$

Sestavíme pohybovou rovnici

$$m\ddot{y} = -mg + F_y(y)\,,$$

kde $\ddot{y}$ je Matějovo aktuální zrychlení a tíhová síla $-mg$ má znaménko mínus, protože působí směrem dolů proti síle F_y. Dosadíme za $F_y(y)$ a upravíme

$$\ddot{y} = -g + \frac{4(h-y)k}{m}\left(1 - \frac{l}{\sqrt{l^2 + 4(h-y)^2}}\right) . \tag{3}$$

To je poměrně nehezky vypadající diferenciální rovnice a proto se jí radši nebudeme snažit vyřešit přesně. Stačí si uvědomit, že nás zajímá pouze perioda *malých* kmitů, což znamená, že výchylka může být libovolně malá. Výraz pro sílu tedy rozvineme pomocí Taylorova rozvoje kolem bodu $y = 0$ a členy obsahující vyšší mocniny y zanedbáme, protože po celou dobu pohybu budou oproti y dostatečně malé

$$\begin{aligned}
F_y(y) &= F_y(0) + \frac{\mathrm{d}F_y}{\mathrm{d}y}(0)\,(y-0) + \dots \approx \\
&\approx 4hk\left(1 - \frac{l}{\sqrt{l^2+4h^2}}\right) - 4k\left(1 - \frac{l}{\sqrt{l^2+4h^2}} + \frac{4h^2 l}{\left(l^2+4h^2\right)^{\frac{3}{2}}}\right) y\,,\\
\ddot{y} &= -\frac{4k}{m}\left(1 - \frac{l}{\sqrt{l^2+4h^2}} + \frac{4h^2 l}{\left(l^2+4h^2\right)^{\frac{3}{2}}}\right) y = -\frac{g}{h}\left(1 + \frac{l^3}{\left(l^2+4h^2\right)^{\frac{3}{2}}}\right) y = \\
&= -\frac{g}{h}\left(1 + \frac{4hl}{\left(l^2+4h^2\right)^{\frac{3}{2}} - l\left(l^2+4h^2\right)}\right) y = \\
&= -Ky\,.
\end{aligned}$$

To už je klasická rovnice harmonického oscilátoru

$$\ddot{y} + \omega^2 y = 0\,.$$

Periodu už snadno vyjádříme z úhlové frekvence jako

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi}{\sqrt{K}} = 2\pi\sqrt{\frac{h}{g}}\left(1 + \frac{4h^2 l}{\left(l^2+4h^2\right)^{\frac{3}{2}} - l\left(l^2+4h^2\right)}\right)^{-\frac{1}{2}}$$

$$= 2\pi\sqrt{\frac{h}{g}}\left(\frac{4h^2+l^2}{4h^2+2l^2+l\sqrt{4h^2+l^2}}\right)^{\frac{1}{2}} .$$

Povšimněme si, že perioda vůbec nezávisí na tuhosti gumy k. Zato ale závisí na rozměrech l i h, nelze proto uvažovat pouze jejich poměr. To je z toho důvodu, že pro pružiny ze stejného materiálu se stejným průřezem závisí tuhost na ještě i na jejich délce.

Matěj Mezera
`m.mezera@fykos.cz`