Úloha V.E ... třiceticentimetrový tón 12 bodů; průměr 5,96; řešilo 23 studentů

Každý někdy z nudy zkusil brnkat na dlouhé pravítko vystrčené přes okraj lavice. Zvolte vhodný model závislosti frekvence na délce vysunutí za okraj lavice a experimentálně jej ověřte. Popište i další parametry pravítka.

Poznámka *Pravítko ke stolu přitlačte tak, aby kmitala jen jeho vysunutá část.*

Michal K. našel pravítko.

Teória

Po krátkom zmyslení sa nad problémom si môžeme uvedomiť, že rovnaký vzťah ako pre kmitajúce pravítko platí aj pre ladičku či konzolový nosník. Napríklad na[1] môžeme nájsť hľadaný vzťah závislosti uhlovej frekvencie ω kmitov na dĺžke vysunutia L pravítka

$$\omega_n = \alpha_n^2 \sqrt{\frac{EI}{\varrho A\ L^4}}\,,$$

kde E je Youngov modul pružnosti a ϱ hustota materiálu, z ktorého je pravítko zhotovené, A je plocha kolmého prierezu pravítka, I je moment zotrvačnosti prierezu pravítka a $\alpha_n = \{1{,}875;\ 4{,}694;\ 7{,}885;\ \ldots\}$ je číselná konštanta zodpovedajúca módu kmitov. Pre I podľa článku máme

$$I = \frac{bd^3}{12}\,,$$

kde b je šírka a d je hrúbka pravítka. Pre frekvenciu kmitov potom máme

$$f = \frac{\omega}{2\pi} = \frac{\alpha_n^2}{4\pi}\sqrt{\frac{Ed^2}{3\varrho L^4}}\,.$$

Frekvencia by teda na dĺžke vysunutia mala závisieť ako $f \propto L^{-2}$.

Meranie

Pri meraní bolo použité pravítko s „dĺžkou“ 30 cm šírky $s = (3{,}6 \pm 0{,}1)\,\mathrm{cm}$, hrúbky $d = (1{,}9 \pm 0{,}1)\,\mathrm{mm}$ a hmotnosti $m = (23 \pm 1)\,\mathrm{g}$. Pri meraní sme ho položili na stôl tak, aby sa hrana stola nachádzala na dĺžke $\tilde{l}$ stupnice, kde nula stupnice bola mimo stola. Vzdialenosť nuly stupnice od konca pravítka bola určená ako $\Delta l = (1{,}1 \pm 0{,}1)\,\mathrm{cm}$. Na stôl sme následne položili závažie (knihy), ktorého hrana koincidovala s hranou stola, čím sme pravítku v oblasti nad stolom zamedzili pohybu. Celkovo odhadujeme chybu merania dĺžky voľne kmitajúcej vysunutej časti pravítka na $l = \tilde{l} + \Delta l$ na $\sigma_l = 1{,}5\,\mathrm{mm}$.

Meranie samotné sme vykonali pomocou programu *Audacity* a mikrofónu na počítači, ktorý sme umiestnili tesne pod pravítko k hrane stola. Zaznamenávali sme teda zvuk úderov kmitajúceho pravítka do stola. Zo získaného záznamu intenzity na čase sme odčítali čas t medzi n po sebe idúcimi nárazmi, z čoho sme určili periódu kmitov ako $T = t/n$. Pre každú dĺžku vysunutia boli vykonané štyri merania. Namerané hodnoty sú zanesené do tabuľky 1 spolu s vypočítanými priemernými hodnotami periódy $\overline{T}$ a jej štandardnou odchýlkou $\sigma_{\overline{T}}$.

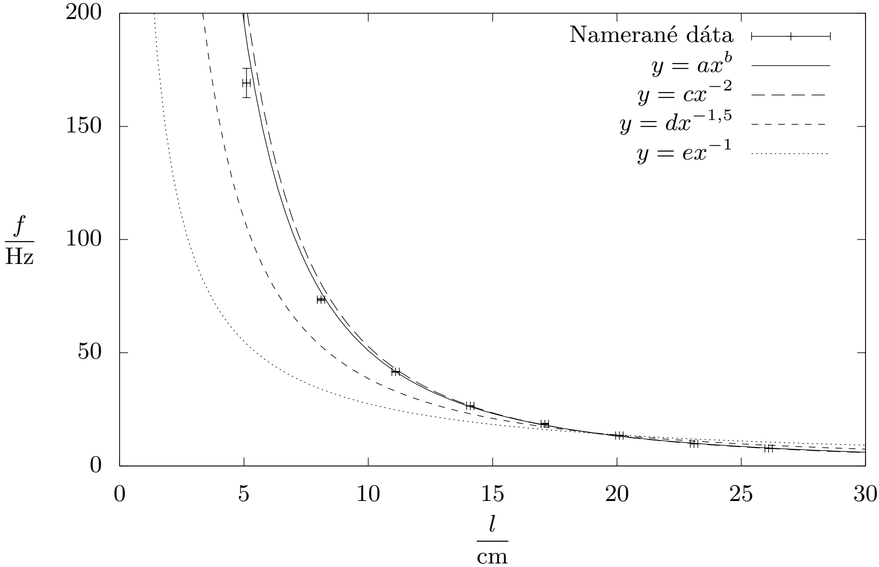
[1] http://vlab.amrita.edu/?sub=3&brch=175&sim=1080&cnt=1

Tab. 1: Namerané periódy kmitov pravítka.

$\frac{\tilde{l}}{\text{cm}}$	$\frac{l}{\text{cm}}$	n	$\frac{t}{\text{ms}}$	$\frac{T}{\text{ms}}$	$\frac{\overline{T}}{\text{ms}}$	$\frac{\sigma_{\overline{T}}}{\text{ms}}$
25,0	26,1	9	1157	128,6	128,4	0,4
		7	898	128,3		
		8	1 031	128,9		
		9	1 151	127,9		
22,0	23,1	5	517	103,4	101,5	1,3
		7	708	101,1		
		3	303	101,0		
		9	905	100,6		
19,0	20,1	4	301	75,3	74,4	0,7
		4	299	74,8		
		1	74	74,0		
		3	221	73,7		
16,0	17,1	5	273	54,6	53,8	0,8
		16	849	53,1		
		13	693	53,3		
		5	272	54,4		
13,0	14,1	14	526	37,57	37,73	0,15
		14	527	37,64		
		6	227	37,83		
		9	341	37,89		
10,0	11,1	21	504	24,00	24,04	0,11
		17	411	24,18		
		18	433	24,06		
		25	598	23,92		
7,0	8,1	18	246	13,67	13,62	0,09
		18	244	13,56		
		19	257	13,53		
		14	192	13,71		
4,0	5,1	24	143	5,96	5,9	0,2
		11	68	6,18		
		22	129	5,86		
		22	124	5,64		

Z period kmitov bola určená ich frekvencia ako

$$f = \frac{1}{T}\,,$$
$$\sigma_f = \frac{\sigma_T}{T^2}\,,$$



Obr. 1: Závislosť frekvencie f kmitov pravítka na dĺžke vysunutia l.

ktorej závislosť bola vynesená do grafu 1. Týmito bodmi boli pomocou metódy najmenších štvorcov preložené nasledujúce závislosti

$$
\begin{aligned}
y_1 &= ax^b\,,\\
y_2 &= cx^{-2}\,,\\
y_3 &= dx^{-1,5}\,,\\
y_4 &= ex^{-1}\,,
\end{aligned}
$$

kde za x bola braná *dĺžka v centimetroch* a y *frekvencia v kilohertzoch*. Prvý fit vyjadruje všeobecný tvar hľadanej závislosti, druhá závislosť je závislosť nášho modelu, tretia a štvrtá sú pre porovnanie závislosti, ktoré sa objavovali v prišlých riešeniach. Hodnoty parametrov boli určené nasledovne

$$
\begin{aligned}
a &= 4{,}44 \pm 0{,}36\,,\\
b &= -1{,}94 \pm 0{,}03\,,\\
c &= 5{,}28 \pm 0{,}06\,,\\
d &= 1{,}22 \pm 0{,}07\,,\\
e &= 0{,}275 \pm 0{,}04\,.
\end{aligned}
$$

Vhodnosť fitu sa dá popísať napríklad pomocou RMS, strednej hodnoty kvadrátu reziduí, tj. odchýlok nameraných hodnôt od fitu. Pre prvú závislosť $RMS = 1{,}392$, pre druhú $RMS = 1{,}56$, tretiu $RMS = 10{,}7$ a štvrtú $RMS = 33$.

Diskusia

Z hodnôt RMS, ale aj z grafu samotného, vidíme, že za správne sa dajú pokladať prvé dve závislosti. Exponent b prvej závislosti je ale značne nefyzikálny, preto ako správnu volíme druhú závislosť. Pre koeficient c máme po prevode do základných jednotiek $c = (0{,}528 \pm 0{,}006)\,\mathrm{m^2{\cdot}Hz}$. Po porovnaní so vzťahom z teoretického úvodu by malo platiť

$$c_{\mathrm{teor}} = \frac{1{,}875^2}{4\pi}\sqrt{\frac{Ed^2}{3\varrho}}\,.$$

PVC, z ktorého je pravítko zhotovené, má modul pružnosti $E = 2{,}2 - 3{,}3\,\mathrm{GPa}$ a hustotu[2] $\varrho = 1{,}15 - 1{,}64\,\mathrm{kg{\cdot}m^{-3}}$. Z rozmerov pravítka a jeho hmotnosti vychádza hustota ako $\varrho = (1\,280 \pm 90)\,\mathrm{kg{\cdot}m^{-3}}$. Po dosadení krajných hodnôt dostávame $c_{\mathrm{teor}} = 0{,}36 - 0{,}53\,\mathrm{m^2{\cdot}Hz}$, teda nameraná hodnota zodpovedá PVC s vysokým Youngovym modulom, nízkou hustotou a hrubšiemu pravítku.

Nami nameraná závislosť je teda celkom dobre popísaná teoretickým modelom, no ako si z grafu môžeme všimnúť, pre malé dĺžky vysunutia teoretická závislosť neprechádza nameranými hodnotami. Toto môže byť spôsobené javmi odohrávajúcimi sa na hrane stola a pod závažím, ktoré by sa dali odstrániť pevnejším uchytením, čo by ale zamedzilo vzniku zvuku, pomocou ktorého sme závislosť merali. Lepšie uchytenenie by znížilo aj chybu určenia l. Frekvencia kmitov sa dala merať s pomerne vyššou presnosťou. Pri určení teoretickej hodnoty konštanty c spôsobuje veľký problém značný rozptyl hustôt a Youngových modulov PVC. Tento problém by sa dal vyriešiť zmeraním týchto veličín priamo pre pravítko.

Záver

Závislosť frekvencie kmitov pravítka f na dĺžke jeho vysunutia l sme určili ako

$$f = \frac{c}{l^2}\,,$$
$$c = (0{,}528 \pm 0{,}006)\,\mathrm{m^2{\cdot}Hz}\,,$$

čo sa zhoduje s teoretickou závislosťou

$$f = \frac{1{,}875^2}{4\pi}\sqrt{\frac{Ed^2}{3\varrho L^4}}\,,$$

pre základný mód kmitov.

Poznámky k došlým řešením

Veľká väčšina z vás, ktorí úlohu merali pomocou zvukového záznamu, sa snažila určiť frekvenciu kmitov zo spektra, ktoré program *Audiacity* ponúkal. Avšak pri predvolenom nastavení sa frekvencie, s ktorými pravítko kmitá, ani nezobrazujú. V prípade, ak sa nastaví väčší frekvenčný rozsah, je možné frekvencie určiť aj zo spektra. Vzhľadom na malý počet zachytených periód je však signál pomerne slabý a široký. Preto bolo vhodnejšie frekvenciu odčítať priamo z intenzitnej závislosti. Mnohých z vás ale v spektre zviedol najvýreznejší signál, často pri frekvencii v stovkách hertzov, z ktorého ste zostavili hľadanú závislosť. Tento signál ale zjavne

[2] WolframAlpha

nepochádza od veľkých, okom viditeľných kmitov pravítka (Veď kto vidí okom 100 Hz?), ale od iného vlnenia, pravdepodobne zvuku po údere pravítka do hrany stola. Je zrejmé, že takýmto riešeniam som nemohol udeliť veľa bodov.
Niektorí sa tomuto problému vyhli a merali pomocou videozáznamu, ktorý však neumožňoval meranie pre malé vysunutia.
Zaujímavé boli aj rôzne teoretické modely. Od konštantnej rýchlosti šírenia impulzu ($f \propto l^{-1}$), cez úvahy s priehybom nosníka, ktoré často viedli na $f \propto l^{-1,5}$ až po správnu závislosť $f \propto l^{-2}$. Graf v riešení som okrem všeobecnej mocninej závislosti preto na ukážku preložil aj týmito závislosťami. Zaujímavé ale boli najmä tvrdenia riešiteľov, ktorým exponent mocninného fitu vyšiel okolo $-1{,}75$, že tým potvrdili predpokladanú závislosť, či už $f \propto l^{-1,5}$, alebo $f \propto l^{-2}$.
Záverom, ak niečo nameriate, je vhodné si rozmyslieť, či získaný výsledok dáva fyzikálne zmysel.

Fyzikální korespondenční seminář je organizován studenty MFF UK. Je zastřešen Oddělením propagace a mediální komunikace MFF UK a podporován Ústavem teoretické fyziky MFF UK, jeho zaměstnanci a Jednotou českých matematiků a fyziků.