

Úloha V.P ... problémy 1 sekundy

9 bodů; průměr 3,62; řešilo 21 studentů

Navrhněte způsoby jak zpomalit zeměkouli tak, abychom k některým rokům nemuseli přidávat přestupnou sekundu. Spočítejte, kolik by to stálo.

Mišo, Lubošek a Filip řešili vstávání na soustředění.

Najskôr sa pozrime prečo vôbec pridávame prestupné sekundy k niektorým rokom. Pridávanie prestupných sekúnd má podobný dôvod ako pridávanie prestupných dní: jedna otočka Zeme okolo osi trvá o niečo dlhšie ako 24 hodín. Táto odchýlka je spôsobená spomalovaním rotácie Zeme príčinou hlavne pôsobenia slapových síl medzi Mesiacom a Zemou, ktoré spôsobujú príliv a odliv, ale rotácia Zeme vďaka treniu príliv a odliv posúva pred pozíciu kde by normálne bol. A táto masa vody spôsobuje vychýlenie gravitačnej sily od spojnice stredov Zeme a Mesiaca, čo má za dôsledok nenulový moment sily, ktorý urýchľuje Mesiac (vďaka čomu sa vzdaluje od Zeme) a spomaľuje rotáciu Zeme.¹ Ďalšie príčiny fluktuácie dĺžky dňa sú napríklad výmena momentu hybnosti s atmosférou vďaka vyparovaniu vody a treniu, zmena momentu zotrvačnosti kvôli roztápaniu horských a pevninských ladovcov a zmenou rozloženia hmoty vnútri Zeme a iné.²

Aby sme prestupné sekundy nemuseli pridávať, tak by dĺžka roka v sekundách musela byť celočíselná. A pokiaľ uvažujeme že rok trvá 365,25 otočiek Zeme okolo osi, tak najbližšia hodnota odchýlky od 24 hodinového dňa pri ktorej bude dĺžka roka v sekundách celočíselná bude $1/365,25 s \doteq 2,7 \text{ ms}$. Momentálna odchýlka sa pohybuje okolo $0,7 \text{ ms}$,³ čo znamená, že potrebujeme predĺžiť dĺžku dňa o asi 2 ms. V tomto riešení si ukážeme tri spôsoby ako by sme toho mohli dosiahnuť, ale samozrejme ich existuje oveľa viac.

Topenie ľadu

Spomínali sme, že topenie ladovcov zväčšuje moment zotrvačnosti Zeme. Cieľom tohto spôsobu je tomuto topeniu výrazne pomôcť. Najskôr ale musíme zistiť, koľko ľadu treba roztopiť. Pre zjednodušenie výpočtov budeme uvažovať, že Zem je guľa s polomerom $R = 6378 \text{ km}$, hmotnosťou $M = 6e24 \text{ kg}$ a momentom zotrvačnosti

$$I_0 = \frac{2}{5}MR^2.$$

Budeme tiež predpokladať že roztopený ľad sa rovnomerne rozloží po povrchu Zeme, čím v podstate vytvorí guľovú plochu s momentom zotrvačnosti

$$I_g = \frac{2}{3}mR^2,$$

kde m je hmotnosť roztopeného ľadu a taktiež pokiaľ budeme brať ľad z blízkosti osi rotácie (napríklad Antarktídy), tak úbytok momentu zotrvačnosti bude zanedbateľný. Nový moment zotrvačnosti potom bude

$$I' = I_0 + I_g = \frac{2}{5}MR^2 + \frac{2}{3}mR^2,$$

¹Toto je len kvalitatívny popis, nakoľko popis slapových síl medzi rotujúcimi telesami nieje podstata úlohy. Zaujímaví o kvantitatívny popis si ho môžu pozrieť napríklad na https://en.wikipedia.org/wiki/Tidal_acceleration.

²https://en.wikipedia.org/wiki/Day_length_fluctuations, <https://en.wikipedia.org/wiki/ΔT>.

³Táto hodnota je približne priemer okolo ktorého sa fluktuácie pohybujú. V skutočnosti sa reálna hodnota mení zo dňa na deň. Súčasnú hodnotu si môžete pozrieť napríklad na <http://hpiers.obspm.fr/eop-pc/index.php>.

zo zákona zchovania hybnosti dostaneme

$$\omega' I' = \omega I_0 ,$$

$$\frac{2\pi}{T'} I' = \frac{2\pi}{T_0} I_0 ,$$

kde T_0 a T' sú časy jednej otočky Zeme okolo osi pred a po roztopení ľadu. Po vyjadrení m a dosadení za I_0 a I' dostaneme

$$m = \frac{3}{5} M \left(\frac{T'}{T_0} - 1 \right) .$$

A po dosadení číselných hodnôt $T_0 = 86\,400,000\,7\text{ s}$ a $T' = 86\,400,002\,7\text{ s}$ dostaneme hmotnosť

$$m = 8,3 \cdot 10^{16} \text{ kg} .$$

Ľad má merné skupenské teplo topenia $334\,000 \text{ J}\cdot\text{kg}^{-1}$ a mernú tepelnú kapacitu $2\,100 \text{ J}\cdot\text{kg}^{-1}\cdot\text{K}^{-1}$. Budeme ho samozrejme topiť v lete, kedy má pobrežný ľad v Antarktíde⁴ teplotu okolo 10°C ,⁵ čo dohromady bude dávať približne $3,5 \cdot 10^5 \text{ J}\cdot\text{kg}^{-1}$. A celkové teplo, ktoré budeme musieť dodať, bude

$$\Delta Q \doteq 2,9 \cdot 10^{22} \text{ J} .$$

Súčasná svetová spotreba energie⁶ je asi $5,6 \cdot 10^{20} \text{ J}$, takže aj keby sme celú súčasnú produkciu energie používali výhradne pre topenie ľadu, tak by sme na roztopenie požadovaného množstva potrebovali okolo 50 rokov. A keď si zoberieme priemernú cenu 1 kWh v Európe $0,1 \text{ €}$,⁷ tak by toto topenie ľadu stálo približne $8 \cdot 10^{14} \text{ €}$.

Ťlak slnečného žiarenia

Tento spôsob využíva toho, že fotóny zo Slnka majú svoju hybnosť, a teda aj pôsobia tlakom, ktorý vieme využiť napríklad tým, že po Zemi rozostaviame zrkadlá. Zrkadlá budú fotóny odrážať a vďaka tomu budú pôsobiť momentom sily na Zem. Tlak spôsobovaný týmito fotónmi pri Zemi je

$$p = \frac{F}{S} = \frac{1}{S} \frac{E}{tc} = \frac{P_S}{c} ,$$

kde E/c je hybnosť fotónov a P_S je slnečná konštanta, ktorá má pri Zemi hodnotu $P_S = 1\,367 \text{ W}\cdot\text{m}^{-2}$. Na požadované spomalenie Zeme budeme musieť zmenšiť jej moment hybnosti o

$$\Delta L = \omega I_0 - \omega' I_0 = 2\pi \frac{I_0}{T_0} - 2\pi \frac{I_0}{T'} = \frac{4\pi}{5} MR^2 \left(\frac{1}{T_0} - \frac{1}{T'} \right) ,$$

kde ω' a T' sú uhlová rýchlosť a perióda po spomalení. Po dosadení číselných hodnôt dostaneme

$$\Delta L = 1,6 \cdot 10^{26} \text{ N}\cdot\text{m}\cdot\text{s} ,$$

Budeme predpokladať, že môžeme zrkadlá rozostaviť po celom povrchu Zeme a aj ich počas dňa otáčať. Jedným z možných rozostavení je také, že zrkadlá na strane na ktorej je predpoludním odrážajú fotóny kolmo naspäť, čím na ne pôsobí dvakrát väčší tlak ako keby ich len pohlcovali.

⁴V podstate je jedno ktorý pevninský ľad si vyberieme, výsledok to veľmi nezmení.

⁵https://en.wikipedia.org/wiki/Climate_of_Antarctica

⁶<http://ourworldindata.org/energy-production-and-changing-energy-sources>

⁷http://ec.europa.eu/eurostat/statistics-explained/index.php/Electricity_price_statistics

Zrkadlá na strane na ktorej je popoludní ich odrážajú tak, že výsledná zmena hybnosti smeruje do stredu Zeme. Toto zostavenie nieje najlepšie možné, ale pokiaľ zvolíme rameno sily polomer Zeme tak by sa tieto aproximácie mali vykompenzovať a dostaneme približne rovnaký moment sily ako by sme dostali počítaním

$$M \approx pSr = \frac{P_S}{c} \cdot \pi R^2 \cdot R,$$

$$M \approx \frac{\pi R^3 P_S}{c},$$

a po dosadení číselných hodnôt

$$M \approx 3,7 \cdot 10^{15} \text{ N}\cdot\text{m}.$$

Po vydelení ΔL týmto momentom dostaneme čas, za ktorý toto spomaľovanie skončí

$$t = \frac{\Delta L}{M} \approx 4,3 \cdot 10^{10} \text{ s} \doteq 1400 \text{ rokov},$$

čo je asi 30-krát pomalšie ako predchádzajúci spôsob.

Povrch Zeme je približne $5 \cdot 10^{14} \text{ m}^2$ a meter štvorcový lepšieho zrkadla stojí minimálne 200 €, takže cena všetkých zrkadiel bude minimálne 10^{17} €, z čoho vyplýva, že tento spôsob je nielen pomalší ale aj 100-krát drahší.

Pri takto dlhom čase sa už veľmi výrazne prejaví spomaľovanie v dôsledku slapových síl, ktoré spomaľuje rotáciu Zeme asi o 1,7 ms za storočie, takže spomaľenie vďaka tomuto spôsobu je teda viacmenej zanedbateľné a naozaj sa neoplatí.

Raketové motory

Predchádzajúci spôsob trval príliš dlho, takže ak by sme sa spomaľovania chceli dožiť, tak musíme zväčšiť moment sily, ktorým pôsobíme na Zem. To vieme dosiahnuť viacerými spôsobmi. Napríklad výmena slabého tlaku fotónov za o dost silnejší ťah raketového motora. Presnejšie použijeme najsilnejší motor na tekuté palivo aký bol doteraz použitý: RD-170, ktorý má pri zemi ťah 7,3 MN. Ako palivo používa tekutý kyslík (spotreba $432 \text{ kg}\cdot\text{s}^{-1}$) a rafinovaný petrolej (spotreba $166 \text{ kg}\cdot\text{s}^{-1}$).⁸

Vplyv atmosféry budeme zanedbávať. Motor samozrejme kôli najväčšiemu ramenu umiestnime na rovník, kde bude pôsobiť momentom sily

$$M = FR \doteq 4,7 \cdot 10^{13} \text{ N}\cdot\text{m},$$

ktorým keď vydělíme $\Delta L = 1,6 \cdot 10^{26} \text{ N}\cdot\text{m}\cdot\text{s}$ z predchádzajúceho spôsobu, tak dostaneme čas, za ktorý Zem spomalí

$$t = \frac{\Delta L}{M} \doteq 3,4 \cdot 10^{12} \text{ s} \doteq 10900 \text{ rokov},$$

čo je na prvý pohľad oveľa viac ako v predchádzajúcich spôsoboch, ale tento spôsob má výhodu v tom, že môžeme pridať viac motorov na zvýšenie momentu sily. Napríklad keď budeme mať 10000 motorov, tak sa moment sily zvýši 10000-krát a tým sa skráti čas len na 10 rokov, čo už je 5-krát menej než čas spomaľovania v prvom spôsobe.

⁸<http://www.astronautix.com/r/rd-170.html>

Cena tekutého kyslíka je⁹ $0,16 \text{ €} \cdot \text{kg}^{-1}$, avšak cena rafinovaného petroleja pre rakety je¹⁰ okolo $30 \text{ €} \cdot \text{kg}^{-1}$, čo prevažuje všetky ostatné náklady a teda celková cena potrebného rafinovaného petroleja je okolo $1,7 \cdot 10^{16} \text{ €}$. Ale keď si vypočítame koľko petroleja potrebujeme, zistíme, že treba $5,7 \cdot 10^{14} \text{ kg}$, čo je približne veľkosť svetových zásob ropy¹¹ a keďže petrolej je vysoko rafinovaný, tak ho nemusí byť dostatok.

Namiesto petroleja môžeme však použiť tekutý vodík ktorý je 10-krát lacnejší ako petrolej, ale zato je o trochu menej účinný. Pokiaľ však chceme ušetriť, tak vodík je správna voľba. Cena tekutého vodíka¹² je $3,66 \text{ €} \cdot \text{kg}^{-1}$ a teda cena spolu s kyslíkom za sekundu je $677 \text{ €} \cdot \text{s}^{-1}$, čo nám dáva celkovú cenu paliva $2,3 \cdot 10^{15} \text{ €}$, čo je v porovnaní s prvým spôsobom len skoro štyrikrát drahšie, ale pritom vie ušetriť veľa času. Cena jedného motora sa pohybuje rádovo v desiatkách miliónov eur, takže ani milión motorov celkovú cenu znateľne neovlivní, ale zato ohromne skráti čas spomaľovania.

Nakoniec záleží len na tom, či chceme spomaliť rotáciu čo najrýchlejšie alebo pri tom chceme čo najviac ušetriť. Pokiaľ nám ide o peniaze, najlepšie bude roztápať ľadovce. Ale ak nechceme byť na dôchodku keď spomaľovanie skončí, tak si chceme zaobstarat zopár tisíc raketových motorov a veľa paliva.

Matúš Kopunec

matus.kopunec@fykos.cz

Fyzikální korespondenční seminář je organizován studenty MFF UK. Je zastřešen Oddělením propagace a mediální komunikace MFF UK a podporován Ústavem teoretické fyziky MFF UK, jeho zaměstnanci a Jednotou českých matematiků a fyziků.

Toto dílo je šířeno pod licencí Creative Commons Attribution-Share Alike 3.0 Unported.
Pro zobrazení kopie této licence navštivte <http://creativecommons.org/licenses/by-sa/3.0/>.

⁹www.quora.com/How-much-does-NASA-pay-per-kg-for-hydrogen-and-oxygen-in-rocket-fuel

¹⁰www.dla.mil/Portals/104/Documents/Energy/Standard%20Prices/Aerospace%20Prices/E_20170ct1AerospaceStandardPrices_170913.pdf?ver=2017-09-13-145335-477

¹¹www.worldenergy.org/data/resources/resource/oil/

¹²www.quora.com/How-much-does-NASA-pay-per-kg-for-hydrogen-and-oxygen-in-rocket-fuel