Úloha V.4 ... rozstřik

8 bodů; průměr 2,96; řešilo 26 studentů

Uvažujte volnou kapku vody s poloměrem R, kterou pomalu nabíjíte elektrickým nábojem. Najděte velikost náboje Q potřebného na to, aby sa kapka rozstříkla.

Karel chtěl, aby si pro potkana přišel Smrť. Ivo byl mírumilovnější.

Uvažujme nejdříve elektricky neutrální vodní kapku nacházející se ve vzduchu. Povrchové napětí lze chápat jako plošnou hustotu povrchové energie, tedy energii povrchové vrstvy kapaliny vztaženou na jednotkovou plochu. To způsobí, že kapka bude mít tendenci zaujmout tvar s nejmenším povrchem, tedy kouli s poloměrem R. Na kapku působí kapilární tlak p_k způsobený povrchovým napětím mezi vodou a vzduchem a tlak vzduchu odpovídající atmosférickému tlaku p_a. Oba tyto tlaky se uvnitř kapky sečtou na výsledný tlak $p_\mathrm{k} + p_\mathrm{a}$. Z Youngovy-Laplaceovy rovnice[1] přímo plyne vztah pro kapilární tlak uvnitř sférické kapky

$$p_\mathrm{k} = \frac{2\sigma}{R}\,,$$

kde σ je povrchové napětí mezi vodou a vzduchem.

Nyní nabijeme kapku nábojem Q tak pomalu, že ji můžeme považovat za vodivou, takže se nanesený náboj prakticky ihned rovnoměrně rozloží po jejím povrchu. Náboj na povrchu kapky vytvoří vně kapky elektrické pole, které bude silově působit na libovolnou malou plošku ΔS povrchu kapky a vytvoří tak tlak elektrického pole p_E.

Pokusme se určit velikost tlaku p_E. Označme η plošnou hustotu náboje na povrchu kapky, která je rovna

$$\eta = \frac{Q}{4\pi R^2}\,.$$

Využijeme faktu, že elektrické pole sféricky symetricky rozloženého náboje je vně koule stejné jako elektrické pole bodového náboje Q umístěného ve středu koule. Naopak uvnitř kapky je elektrické pole nulové, protože se jedná o vodič. Vnější elektrické pole je tedy radiální a pro jeho velikost platí

$$E = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q}{r^2}\,, \tag{1}$$

kde $r > R$ je vzdálenost od středu kapky a ε_0 je permitivita vakua. Pro výpočet tlaku p_E potřebujeme zjistit, jakou silou působí elektrické pole na malou plošku ΔS s nábojovou hustotou η. Komplikace je v tom, že do výsledného elektrického pole přispívá i náboj na malé plošce ΔS, jehož příspěvek musíme odečíst. Zajímá nás totiž, jakou silou působí na náboj na malé plošce ΔS elektrické pole od zbytku koule.

Využijeme principu superpozice. Označme $E_{\Delta S}$ velikost elektrické intenzity způsobené nábojem na malé plošce ΔS v blízkosti této plošky. Vektor elektrické intenzity je zřejmě kolmý na rovinu plošky a míří směrem od povrchu této plošky (uvnitř koule směřuje do středu a vně koule směřuje od středu koule). Důležité je, že toto pole je v obou případech stejně velké. Elektrické pole nábojů na zbylé části koule uvažujeme v blízkosti plošky konstantní s velikostí E'. Uvnitř i vně má stejnou velikost a směřuje od středu koule. Teď využijeme toho, že výsledná elektrická intenzita uvnitř koule je nulová,

$$E' - E_{\Delta S} = 0\,.$$

[1] Více se o ní můžete dočíst na `https://en.wikipedia.org/wiki/Young-Laplace_equation`.

Velikost výsledného pole nad ploškou je potom $E' + E_{\Delta S} = 2E_{\Delta S} = 2E'$. Srovnáním s rovnicí (1) dostáváme

$$2E' = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q}{R^2}\,,$$

odkud jednoduchou úpravou získáme explicitní vztah pro výpočet velikosti elektrického pole od zbytku koule v oblasti plošky ΔS,

$$E' = \frac{1}{8\pi\varepsilon_0}\frac{Q}{R^2}\,.$$

Tlak elektrického pole již spočítáme snadno jako podíl velikosti síly působící na náboj na malé plošce a velikosti dané plošky

$$p_{\mathrm{E}} = \frac{E'\eta\Delta S}{\Delta S} = \frac{1}{32\pi^2\varepsilon_0}\frac{Q^2}{R^4}\,.$$

Uvědomme si, že p_{E} má opačný směr než kapilární tlak, neboť se souhlasné náboje v kapce zřejmě odpuzují. Podmínka rozstřiku kapky je

$$p_{\mathrm{E}} = p_{\mathrm{k}} + p_{\mathrm{a}}\,,$$

$$\frac{1}{32\pi^2\varepsilon_0}\frac{Q^2}{R^4} = \frac{2\sigma}{R} + p_{\mathrm{a}}\,.$$

Odtud si už snadno vyjádříme velikost potřebného náboje

$$|Q| = 4\pi R^2\sqrt{2\varepsilon_0}\sqrt{\frac{2\sigma}{R} + p_{\mathrm{a}}}\,.$$

Ještě dodejme, že v zadání nebylo přímo řečeno, abychom úlohu řešili v zemské atmosféře za normálních podmínek. Proto připouštíme řešení nabité kapky ve vakuu, které je o něco jednodušší. Řešení úlohy ve vakuu dostaneme tak, že položíme atmosférický tlak roven nule, neboli dostáváme rovnost

$$|Q| = 8\pi\sqrt{\sigma\varepsilon_0 R^3}\,,$$

Úlohu lze také řešit vysokoškolským přístupem za použití Gaussova zákona pro tok elektrického pole uzavřenou plochou ve tvaru

$$\oint_S \boldsymbol{E}\cdot\boldsymbol{n}\,\mathrm{d}S = \frac{Q}{\varepsilon_0}\,,$$

kde $\boldsymbol{n}$ je jednotkový vnější normálový vektor k nějaké uzavřené ploše a Q je celkový náboj uvnitř této plochy. Aplikací Gaussova zákona na povrch nabité kapky dostáváme rovnost

$$4\pi R^2 E = \frac{Q}{\varepsilon_0}\,,$$

odkud pro velikost výsledného elektrického pole plyne

$$E = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q}{R^2}\,,$$

což je ve shodě s rovnicí (1) pro $r = R$. Abychom mohli odečíst od výsledného elektrického pole příspěvek od náboje na malé plošce ΔS, potřebujeme určit jeho velikost. Opět vyjdeme z Gaussova zákona. Uvažujme malý váleček obklopující na povrchu kapky právě plošku ΔS tak, že je jeho osa rovnoběžná s normálovým vektorem na plošce ΔS (míří v rádiálním směru). Z Gaussova zákona plyne, že tok intenzity elektrického pole povrchem válečku je roven celkovému náboji uvnitř válečku vydělenému konstantou ε_0. Tok pláštěm je zanedbatelný, protože výšku válečku můžeme uvažovat libovolně malou. Zbývá tedy tok podstavami, pro který platí

$$2\Delta S E_{\Delta S} = \frac{\eta \Delta S}{\varepsilon_0}\,.$$

Jednoduchou úpravou získáme rovnici

$$E_{\Delta S} = \frac{\eta}{2\varepsilon_0} = \frac{Q}{8\pi\varepsilon_0 R^2}\,.$$

Velikost elektrického pole E' v okolí plošky vypočteme podobně jako v první části

$$E' = E - E_{\Delta S} = \frac{1}{8\pi\varepsilon_0}\frac{Q}{R^2}\,.$$

Velikosti elektrických polí, které jsme spočítali pomocí Gaussova zákona, se shodují s již dříve získanými výsledky. K řešení úlohy bychom dále došli stejnými úvahami jako v první části.

Komentář k došlým řešením

Řada řešitelů se pokusila úlohu vyřešit užitím povrchové energie a energie elektrostatického pole. Chybně se však domnívala, že k rozstříknutí kapky dojde v okamžiku, kdy si budou dané energie rovny.

Úloha se dá řešit přes energie tak, že nejdříve nalezneme celkovou energii tvořenou energií elektrostatického pole a povrchovou energií, která je rovna

$$E_{\mathrm{net}} = \frac{1}{8\pi\varepsilon_0}\frac{Q^2}{R} + 4\pi\sigma R^2\,.$$

Celková energie připadající na malou část kapky vyňaté malým prostorovým úhlem Ω je pak rovna

$$E_\Omega = \frac{E_{\mathrm{net}}}{\Omega} = \frac{1}{8\pi\varepsilon_0\Omega}\frac{Q^2}{R} + \frac{4\pi}{\Omega}\sigma R^2\,. \tag{2}$$

Sílu působící na tuto plošku určíme jako záporně vzatý gradient energie E_Ω,

$$\boldsymbol{F}_\Omega = -\operatorname{grad} E_\Omega \equiv -\nabla E_\Omega\,,$$

což je ve sférických souřadnicích pro sféricky symetrický problém rovno

$$\boldsymbol{F}_\Omega = -\frac{\partial E_\Omega}{\partial R}\boldsymbol{e}_R\,, \tag{3}$$

kde $\boldsymbol{e}_R$ je jednotkový radiální vektor (ve směru souřadnice R). Dosazaním výrazu pro energii E_Ω z rovnice (2) do rovnice (3) a zderivováním dostaneme

$$\boldsymbol{F}_\Omega = \left(-\frac{8\pi\sigma R}{\Omega} + \frac{1}{8\pi\varepsilon_0\Omega}\frac{Q^2}{R^2}\right)\boldsymbol{e}_R\,.$$

K rozstříknutí kapky pak dojde, bude-li síla $\boldsymbol{F}_\Omega$ směřovat vně kapku, neboli

$$-\frac{8\pi\sigma R}{\Omega} + \frac{1}{8\pi\varepsilon_0\Omega}\frac{Q^2}{R^2} \geq 0\,.$$

V mezním případě dostáváme pro velikost náboje Q rovnost

$$|Q| = 8\pi\sqrt{\sigma\varepsilon_0 R^3}\,,$$

což je minimální velikost náboje potřebná pro rozstříknutí kapky.

Václav Mikeska
`v.mikeska@fykos.cz`

Fyzikální korespondenční seminář je organizován studenty MFF UK. Je zastřešen Oddělením propagace a mediální komunikace MFF UK a podporován Ústavem teoretické fyziky MFF UK, jeho zaměstnanci a Jednotou českých matematiků a fyziků.