Úloha V.3 ... přepážka

6 bodů; průměr 4,40; řešilo 45 studentů

Představme si akvárium tvaru krychle o straně $a = 1\,\mathrm{m}$, které je vertikální přepážkou kolmou na stěny akvária rozděleno na dvě části. Dále uvažujme, že se tato přepážka může volně pohybovat ve směru kolmém na rovinu přepážky, ale ve zbylých dvou směrech se pohybovat nemůže. Také nemůže rotovat. Do jedné části akvária nalijeme $V_1 = 200\,\ell$ vody o hustotě $\varrho_\mathrm{v} = 1\,000\,\mathrm{kg{\cdot}m^{-3}}$ a do druhé části nalijeme $V_2 = 230\,\ell$ oleje o hustotě $\varrho_\mathrm{o} = 900\,\mathrm{kg{\cdot}m^{-3}}$. Jaká bude rovnovážná pozice přepážky? Jaké budou výšky hladin kapalin v jednotlivých částech akvária v rovnovážném stavu?

Bonus *Najděte frekvenci malých kmitů kolem rovnovážné polohy. Předpokládejte, že přepážka má hmotnost $m = 10\,\mathrm{oz}$ a že přesun vody probíhá bez jakéhokoli tření a odporu.*

Michal čistil akvárium.

Označme vzdálenost přepážky od okraje první části x. Potom voda sahá do výšky

$$y_1 = \frac{V_1}{ax}$$

a olej sahá do výšky

$$y_2 = \frac{V_2}{a\,(a-x)}\,.$$

Sílu, kterou kapalina působí na přepážku, spočítáme jako součin tlaku v kapalině a plochy přepážky, v které tento tlak působí. Tlak v kapalině se s hloubkou mění podle vzorce $p = h\varrho g$, což vede na integrál. Tomu se však můžeme vyhnout, když si uvědomíme, že nižší tlak v horní polovině přepážky kompenzuje vyšší tlak v dolní polovině.[1] Můžeme tak uvažovat, že na celou přepážku působí stejný průměrný tlak. Pro sílu způsobenou tlakem vody dostáváme

$$F_1 = \frac{1}{2} y_1 \varrho_\mathrm{v} g a y_1 = \frac{V_1^2 \varrho_\mathrm{v} g}{2ax^2}\,,$$

zatímco pro sílu způsobenou tlakem oleje platí

$$F_2 = \frac{1}{2} y_2 \varrho_\mathrm{o} g a y_2 = \frac{V_2^2 \varrho_\mathrm{o} g}{2a\,(a-x)^2}\,.$$

Z podmínky rovnováhy vyplývá rovnost sil, tedy $F_1(x_0) = F_2(x_0)$. Odtud dostáváme kvadratickou rovnici

$$\left(\frac{V_2^2 \varrho_\mathrm{o}}{V_1^2 \varrho_\mathrm{v}} - 1\right) x_0^2 + 2ax_0 - a^2 = 0\,,$$

jejímž řešením je

$$x_0 = \frac{a}{\left(\frac{V_2^2 \varrho_\mathrm{o}}{V_1^2 \varrho_\mathrm{v}} - 1\right)} \left(-1 \pm \frac{V_2}{V_1}\sqrt{\frac{\varrho_\mathrm{o}}{\varrho_\mathrm{v}}}\right).$$

Fyzikální smysl má zřejmě kořen s +. Výsledkem úlohy tak je, že přepážka se ustálí ve vzdálenosti

$$x_0 = a\left(\frac{V_2^2 \varrho_\mathrm{o}}{V_1^2 \varrho_\mathrm{v}} - 1\right)^{-1} \left(\frac{V_2}{V_1}\sqrt{\frac{\varrho_\mathrm{o}}{\varrho_\mathrm{v}}} - 1\right) = a\left(\frac{V_2}{V_1}\sqrt{\frac{\varrho_\mathrm{o}}{\varrho_\mathrm{v}}} + 1\right)^{-1} \doteq 48\,\mathrm{cm}$$

[1] Exaktní výpočet by se provedl tak, že $\mathrm{d}F = p(y) a \mathrm{d}y$, odkud vidíme, že se integruje lineární funkce, tedy vznikne faktor 1/2.

od stěny první části akvária. Výšky kapalin obou částech akvária získáme dosazením za x do prvních dvou rovnic

$$y_1 = \frac{V_1}{ax_0} \doteq 42\,\mathrm{cm}\,,$$
$$y_2 = \frac{V_2}{a\left(a - x_0\right)} \doteq 44\,\mathrm{cm}\,.$$

Bonus

Spočítejme potenciální energii soustavy s přepážkou na souřadnici x. Opět můžeme použít střední hodnotu výšky, ve které se kapaliny nachází. Dostáváme tak

$$V = V_1 \varrho_\mathrm{v} g \frac{y_1}{2} + V_2 \varrho_\mathrm{o} g \frac{y_2}{2} = \frac{g}{2a}\left(\frac{V_1^2 \varrho_\mathrm{v}}{x} + \frac{V_2^2 \varrho_\mathrm{o}}{a - x}\right)\,.$$

Pro frekvenci malých kmitů kolem rovnovážné polohy x_0 platí

$$f = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{V''(x_0)}{m}}\,.$$

Pokud vám tento vzorec přijde cizí, zde je jeho odvození. Potenciál, který nám vyšel, je v okolí rovnovážné polohy zřejmě spojitá a nekonečně diferenciovatelná funkce, takže ji můžeme zapsat pomocí Taylorova polynomu:

$$V(x) = V(x_0) + V'(x_0)\left(x - x_0\right) + \frac{V''(x_0)}{2}\left(x - x_0\right)^2 + \frac{V'''(x_0)}{3!}\left(x - x_0\right)^3 + \frac{V^{(4)}(x_0)}{4!}\left(x - x_0\right)^4 \cdots$$

Zvolíme-li $V(x_0)$ jako nulovou hladinu, bude platit $V(x_0) = 0$. Dále, $V'(x_0) = 0$ z definice rovnovážného bodu. Další členy jsou postupně čím dál tím menší (pro x dostatečně blízká x_0), takže s jistou dávkou aproximace můžeme psát

$$V(x) \approx \frac{1}{2} V''(x_0)\left(x - x_0\right)^2\,.$$

Tento vzorec je však velmi podobný vztahu pro potenciál harmonického oscilátoru

$$V(x) = \frac{1}{2} k \left(x - x_0\right)^2\,.$$

Z toho už vidíme, že člen $V''(x_0)$ hraje roli tuhosti oscilátoru k a můžeme ho dosadit do známého vzorce

$$f = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{k}{m}}\,.$$

Nyní se vraťme k původnímu příkladu. První derivace potenciálu je

$$\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}x} = \frac{g}{2a}\left(-\frac{V_1^2 \varrho_\mathrm{v}}{x^2} + \frac{V_2^2 \varrho_\mathrm{o}}{\left(a - x\right)^2}\right)\,,$$

další derivací dostáváme

$$\frac{\mathrm{d}^2 V}{\mathrm{d}x^2} = \frac{g}{a}\left(\frac{V_1^2 \varrho_\mathrm{v}}{x^3} + \frac{V_2^2 \varrho_\mathrm{o}}{\left(a - x\right)^3}\right)\,.$$

Teď už jen stačí dosadit do vzorce výše a máme výsledek $f \doteq 25\,\mathrm{Hz}$.

Jáchym Bártík
tuaki@fykos.cz