Úloha V.2 ... hloubka vniku do koule

3 body; průměr 2,72; řešilo 32 studentů

Představte si, že máte podchlazenou plnou kovovou homogenní kouli, kterou vytáhnete z mrazáku, který máte nastavený na opravdu nízkou teplotu. Zajímalo by vás, jak rychle se bude zvyšovat její teplota, když ji umístíte do zahřáté místnosti. Protože by to jinak byl vysokoškolský problém, tak jsme pro vás úlohu zjednodušili. Ptáme se na odhad hloubky vniku (v metrech) „teplé oblasti“ do koule, který můžete získat rozměrovou analýzou. Přičemž známe relevantní parametry koule, konkrétně hustotu $[\varrho] = \mathrm{kg{\cdot}m^{-3}}$, *měrnou tepelnou kapacitu* $[c] = \mathrm{J{\cdot}kg^{-1}{\cdot}K^{-1}}$ *a její součinitel tepelné vodivosti* $[\lambda] = \mathrm{W{\cdot}m^{-1}{\cdot}K^{-1}}$ *a zajímá nás závislost na čase* $[t] = \mathrm{s}$.

Karel se inspiroval problémem z Eötvös Competition.

Zadání je zjednodušením úlohy z jedné maďarské soutěže.[1] Na odkaze uvedeném v poznámce pod čarou naleznete i náznak komplikovanějšího řešení.

Nejdříve poznamenáme něco k rozměrové analýze. Jde o metodu, díky které můžeme někdy z pouhé znalosti jednotek relevantních veličin určit nějakou další veličinu se známou jednotkou. Bohužel pomocí této metody nezjistíme přesný vztah, protože nám zůstane nějaká bezrozměrná multiplikační konstanta, kterou musíme určit buď měřením, nebo poctivým fyzikálním odvozením. Také se tato metoda může hodit v nějakých úlohách FYKOSu.

Pro zajímavost - ve fyzice se používají také tzv. podobnostní čísla. Zejména v mechanice a dynamice tekutin je známé například Reynoldsovo číslo či Weberovo číslo. Jde o bezrozměrné veličiny, které nám říkají něco o tom, jestli je proudění turbulentní, jak se nám budou formovat bubliny atd. K určení těchto čísel můžeme také použít rozměrovou analýzu s tím, že hledaná veličina má být bezrozměrná.

Nyní k řešení samotné úlohy. Dle předpokladu má pro hloubku vniku x platit

$$x = C\varrho^{\alpha} c^{\beta} \lambda^{\gamma} t^{\delta} \,.$$

Rovnici můžeme přepsat do tvaru

$$\begin{aligned} \mathrm{m} &= \left(\mathrm{kg{\cdot}m^{-3}}\right)^{\alpha} \cdot \left(\mathrm{J{\cdot}kg^{-1}{\cdot}K^{-1}}\right)^{\beta} \cdot \left(\mathrm{W{\cdot}m^{-1}{\cdot}K^{-1}}\right)^{\gamma} \cdot \mathrm{s}^{\delta} = \\ &= \left(\mathrm{kg{\cdot}m^{-3}}\right)^{\alpha} \cdot \left(\mathrm{m^{2}{\cdot}s^{-2}{\cdot}K^{-1}}\right)^{\beta} \cdot \left(\mathrm{kg{\cdot}m{\cdot}s^{-3}{\cdot}K^{-1}}\right)^{\gamma} \cdot \mathrm{s}^{\delta} \,. \end{aligned}$$

Využili jsme vztahy pro přepis jednotek energie a výkonu na základní jednotky SI ($\mathrm{J} = \mathrm{kg{\cdot}m^2{\cdot}s^{-2}}$ a $\mathrm{W} = \mathrm{kg{\cdot}m^2{\cdot}s^{-3}}$). Vzhledem k tomu, že rovnice musí platit i pro rovnosti jednotlivých jednotek, rozepíšeme si ji do soustavy čtyř rovnic pro čtyři neznámé exponenty $(\alpha, \beta, \gamma, \delta)$. V pořadí pro jednotky kg, m, s a K to jsou

$$\begin{aligned} 0 &= \alpha + \gamma \,, \\ 1 &= -3\alpha + 2\beta + \gamma \,, \\ 0 &= -2\beta - 3\gamma + \delta \,, \\ 0 &= -\beta - \gamma \,. \end{aligned}$$

Když soustavu vyřešíme, dostaneme $\alpha = \beta = -1/2$ a $\gamma = \delta = 1/2$, tedy výsledná rovnice pro hloubku vniku je

$$x = C\sqrt{\frac{\lambda t}{c\varrho}} \,.$$

[1] Peter Vankó: *Eötvös Competition - a small competition with great influence*, subkapitola 3.2. Dostupné z `http://eik.bme.hu/~vanko/wfphc/Eotvos_comp_Vanko_paper.pdf`

Tím jsme dostali požadovaný vztah a v rámci toho, že jde o jednoduchou úlohu na rozměrovou analýzu, dále hodnotu konstanty C neřešíme.

Komentáře k došlým řešením

Rozmerová analýza je veľmi efektívna metóda pre približný odhad správnosti tvaru výsledku alebo k rýchlej kontrole korektnosti nejakého vzťahu. Stretávame sa s ňou aj v bežnej praxi, nie len počas štúdia, a preto je dobré si ju osvojiť. Nakoľko však ide o približný odhad výsledku, nemali by sme zabudnúť, že reálna hodnota sa môže a často aj bude líšiť o nejaký číselný koeficient - bezrozmernú konštantu (jej bezrozmernosť je dôležitá, inak by nám to pokazilo rozmer výsledku). Vzhľadom na zadanie a povahu príkladu sme to však nebrali ako chybu. Viacerí z vás k výsledku prišli porovnaním vzťahov pre výpočet tepla - rovnicou vedenia tepla (niekedy nazývanou aj Fourierov zákon) a vzťahom pre výpočet tepla potrebného na zvýšenie teploty telesa. Tento postup dal pri správnej úprave rovnaký, alebo len o číselný koeficient sa líšiaci výsledok, nie je však úplne fyzikálne správny, nakoľko tieto dva vzťahy spolu nutne nemusia súvisieť. Navyše, ide o veľmi veľké zjednodušenie celého deja, ktoré nebolo adekvátne odôvodnené. Pokiaľ ste však aj týmto spôsobom dospeli k správnemu výsledku, nebrali sme to ako chybu.

Karel Kolář
`karel@fykos.cz`