Úloha IV.3 ... levitující

6 bodů; průměr 5,58; řešilo 33 studentů

Matěj má rád levitující věci, a tak si pořídil nekonečnou nevodivou nabitou vodorovnou rovinu s plošnou nábojovou hustotou σ. Poté nad ní umístil míček o hmotnosti m nabitý nábojem q. Vypočítejte, pro jaké hodnoty σ může míček vůbec nad deskou levitovat. V jaké výšce h se pak může vznášet? Uvažujte konstantní tíhové zrychlení g.

Matěj by chtěl mít superschopnost levitace.

Nejtěžší částí této úlohy je asi výpočet velikosti odpudivé síly, kterou deska působí na míček. Na to je potřeba vypočíst elektrickou intenzitu ve výšce h nad deskou. Na to lze jít několika způsoby.

Nejjednodušší je najít si v tabulkách vzoreček pro elektrickou intenzitu E nekonečné nabité roviny. Ta je všude nad deskou stejná a její velikost je z tabulek $E = \frac{\sigma}{2\varepsilon}$.

Druhá možnost je aplikování Gaussova zákona, který říká, jak je tok elektrické intenzity libovolnou uzavřenou plochou závislý na náboji uvnitř, neboli

$$\oint_S \mathbf{E} \cdot \mathrm{d}\mathbf{S} = \frac{Q}{\varepsilon}\,.$$

Vypadá to komplikovaně, ale zvolíme-li správnou plochu, nemusíme ani integrovat. Ze symetrie předpokládáme, že všechny elektrické siločáry jsou kolmé na desku, protože zde nemůže být žádný jiný preferovaný směr. Představme si libovolný Gaussův válec (to je takový válec, jehož podstavy jsou rovnoběžné s deskou a deska prochází jeho středem). Jeho pláštěm tedy nebude procházet žádný tok elektrické intenzity. Zároveň má intenzita na obou podstavách stejnou (konstantní) hodnotu, protože jsou od desky stejně daleko, takže integrál můžeme vypustit. Také víme, že vektor intenzity je vždy kolmý na podstavu, čili skalární součin přejde ve standardní součin. Má-li podstava plochu S, integrál přejde do tvaru

$$2ES = \frac{Q}{\varepsilon}\,.$$

Nyní stačí jen dosadit náboj uvnitř $Q = \sigma S$ a dostaneme stejný vzoreček jako předtím.

Třetí možností (pro ty, co neznají Gaussův zákon ani tabulky, ale zato rádi integrují) je výpočet přímo z Coulombova zákona. Celou rovinu si rozdělíme na malinké čtverečky a dvakrát integrujeme

$$E = \frac{1}{4\pi\varepsilon} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sigma}{x^2 + y^2 + h^2} \frac{h}{\sqrt{x^2 + y^2 + h^2}}\, \mathrm{d}x\, \mathrm{d}y\,,$$

kde $x^2 + y^2 + h^2$ je vzdálenost od míčku a zlomek $\frac{h}{\sqrt{x^2+y^2+h^2}}$ zaručuje, že sčítáme pouze kolmou složku. Samozřejmě nemusíme integrovat v kartézských souřadnicích. Mohli jsme si celou rovinu také rozsekat na soustředné kružnice a integrovat v polárních souřadnicích. Tyto integrační metody však ponecháme jen labužníkům a integrály se nebudeme již dále zabývat, když můžeme použít například Gaussův zákon.

Máme tedy $E = \frac{\sigma}{2\varepsilon}$. Předpokládáme-li, že Matěj provádí experiment ve vzduchu, jehož permitivita je velmi blízká permitivitě vakua, můžeme psát $E = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}$.

Nyní stačí vyjít z rovnosti tíhové a elektrické síly.

$$
\begin{aligned}
F_\mathrm{e} &= F_g\,,\\
Eq &= mg\,,\\
\frac{\sigma}{2\varepsilon_0}q &= mg\,,\\
\sigma &= \frac{2mg\varepsilon_0}{q}\,.
\end{aligned}
$$

Všimněme si, ze elektrická síla vůbec nezávisí na výšce h nad deskou. Stejně tak pro konstantní tíhové zrychlení tíhová síla nezávisí na výšce. Proto je možné docílit levitace pouze při nábojové hustotě vypočtené výše. Míček ale zase bude levitovat v libovolném místě. Kdyby byla nábojová hustota větší, míček by odletěl do nekonečna a kdyby byla menší, míček by spadnul.

Pokud bychom uvažovali přesnější model s tíhovým zrychlením klesajícím s druhou mocninou vzdálenosti, byla by levitace nestabilní (tzn. při výchylce nahoru by převládla odpudivá elektrická síla a při výchylce dolů by byla větší tíhová přitažlivá síla).

Matěj Mezera
`m.mezera@fykos.cz`