Úloha III.S ... zobecněná

10 bodů; průměr 6,33; řešilo 18 studentů

1. *Mějme vodorovnou desku, ve které je malá dírka. Přes tuto dírku je provlečený provázek o délce l, na jehož spodním konci je zavěšeno závaží o hmotnosti M. Toto závaží lze považovat za hmotný bod. Na druhém konci provázku na rovné desce je druhý hmotný bod (kulička) o hmotnosti m. Provázek mezi nimi je napnutý díky závaží o hmotnosti M. Celou soustavu držíme v klidu tak, že část provázku pod deskou je ve svislém směru. Poté druhému hmotnému bodu, kuličce, udělíme rychlost v ve vodorovném směru kolmém na provázek ve chvíli, kdy soustavu uvolníme. V tomto příkladu neuvažujte žádné tření. Zvolte vhodné souřadnice a sestavte Lagrangeovu funkci pro tuto soustavu.*
2. *Mějme železnou tyč ohnutou do tvaru paraboly tak, že pokud v kartézské soustavě působí tíhové zrychlení v záporném směru osy y, pak tyč má stejný tvar jako funkce $y = x^2$. Po tyči se může volně pohybovat hmotný bod o hmotnosti M, ke kterému je pevnou nehmotnou tyčkou o délce l připevněno závaží o hmotnosti m. Takto jsme vytvořili kyvadlo se závěsem klouzajícím podél ohnuté tyče. Konstrukce dovoluje pohyb celé soustavy pouze v rovině paraboly. Určete vhodné zobecněné souřadnice a najděte Lagrangeovu funkci této soustavy.*
3. *Mějme přímku nakloněnou pod úhlem α vzhledem k vodorovné rovině, po které se pohybuje bez tření hmotný bod o hmotnosti m. Najděte vhodné zobecněné souřadnice této soustavy a sestavte Lagrangeovu funkci. Poté sestavte i Lagrangeovy rovnice, dvakrát je zintegrujte, a tak najděte řešení. Zkontrolujte si, zda vaše řešení vychází stejně, jako řešení, které byste získali středoškolskou metodou výpočtu. Při integraci nezapomeňte na integrační konstanty a vysvětlete jejich význam. Jaké budou jejich hodnoty, pokud se bod spustí z klidu z výšky h?*

1. Nazačiatok je dôležité určiť, koľko stupňov voľnosti má daná úloha, teda koľko zovšeobecnených súradníc budeme potrebovať na jej popis. Všimneme si, že gulička, pohybujúca sa po doske, má dva stupne voľnosti. Môže rotovať okolo dierky, cez ktorú je prevlečená niť, zároveň sa môže pohybovať v smere priamo ďalej alebo bližšie od dierky, nakoľko špagát sa cez dierku tiež pohybuje bez trenia.
   Potom je tu závažie, ktoré tiež môžme reprezentovať ako hmotný bod. Ten má ale len jeden stupeň voľnosti. Môže sa hýbať hore a dole, inak povedané, ak zvolíme osy x, y ležiace v rovine, tak sa závažie môže hýbať iba pozdĺž osi z (merané smerom nahor). Ďalej ale máme v tejto úlohe ešte jednu väzbu, tou je povrázok, ktorý spája hmotné body, a jeho dĺžka je nemenná. Súradnica r, ktorá udáva vzdialenosť guličky od dierky, a súradnica z, ktorá udáva výšku závažia, budú zviazané pomocou vzťahu
   $$l = r - z\,.$$
   Na konštruovanie Lagrangeovej funkcie nám teda ostávajú už len dve nezávislé súradnice, a to z a súradnica vyjadrujúca uhol, ktorý zviera špagát medzi dierkou a guličkou s osou x (voľba osi x je ľubovoľná vďaka symetrii problému).
   Teraz nasleduje druhý krok konštrukcie Lagrangeových rovníc, vyjadrenie kartézskych

súradníc pomocou zovšeobecnených súradníc[1]

$$\begin{aligned} x_m &= (l+z)\cos\varphi\,,\\ y_m &= (l+z)\sin\varphi\,,\\ z_M &= z\,. \end{aligned}$$

Časovým derivovaním jednotlivých súradníc nájdeme vzťahy pre jednotlivé zložky rýchlosti v zovšeobecnených súradniciach. Následne určíme vzťah pre kinetickú energiu T

$$T = \frac{1}{2}m\left(\dot{z}^2 + (l+z)^2\dot{\varphi}^2\right) + \frac{1}{2}M\dot{z}^2\,.$$

Následne určíme potenciál. V tomto prípade sa jedná o potenciálnu energiu závažia (gulička má počas celého pohybu rovnakú potenciálnu energiu, nemusíme ju preto uvažovať)

$$V = Mgz\,.$$

Lagrangeova funkcia pre tento problém bude potom vyzerať

$$L = \frac{1}{2}m\left(\dot{z}^2 + (l+z)^2\dot{\varphi}^2\right) + \frac{1}{2}M\dot{z}^2 - Mgz\,.$$

2. Znova si najprv určíme zovšeobecnené súradnice. Keďže úlohu riešime ako rovinný problém a vieme, že trajektória bodu M je zadaná ako explicitná funkcia (konkrétne $y = ax^2$, kde a je nejaká konštanta, aby nám sedeli jednotky), budú jeho obe súradnice vyjadrené pomocou jedinej súradnice x. Čo sa týka zovšeobecnených súradníc pre druhý bod správajúci sa ako kyvadlo, môžeme použiť súradnice, ktoré sme si ukázali v seriáli. Musíme však ale pamätať, že jeho kartézske súradnice budú nielen súradnice kývajúceho sa kyvadla, ale je nutné k nim pripočítať aj súradnice závesu kyvadla o hmotnosti M.
   Vzťah medzi kartézskymi a zovšeobecnenými súradnicami je teda

$$\begin{aligned} x_M &= x\,,\\ y_M &= ax^2\,,\\ x_m &= x + l\sin\varphi\,,\\ y_m &= ax^2 - l\cos\varphi\,. \end{aligned}$$

   Časovým derivovaním a dosadením do vzťahu pre kinetickú energiu dostaneme

$$T = \frac{1}{2}(M+m)\dot{x}^2\left(1+4a^2x^2\right) + \frac{1}{2}m\left(2l\left(\cos\varphi + 2ax\sin\varphi\right)\dot{x}\dot{\varphi} + l^2\dot{\varphi}^2\right)\,.$$

   Potenciál bude potom súčet potenciálnych energií oboch telies, teda

$$V = Mgax^2 + mg\left(ax^2 - l\cos\varphi\right)\,.$$

   Lagrangeova funkce bude jednoducho

$$\begin{aligned} L = {}&\frac{1}{2}(M+m)\dot{x}^2\left(1+4a^2x^2\right) + \frac{1}{2}m\left(2l\left(\cos\varphi + 2ax\sin\varphi\right)\dot{x}\dot{\varphi} + l^2\dot{\varphi}^2\right)\\ &- Mgax^2 - mg\left(ax^2 - l\cos\varphi\right)\,. \end{aligned}$$

[1] Tento ako aj nasledujúce kroky nebudem zvlášť komentovať, nakoľko sa jedná o mechanické počítanie. Budem len uvádzať, čo robíme a ako vyzerá výsledok. Prečo to robíme (keby niekto nevedel), je uvedené v seriáli.

3. Z hľadiska toho, ako zvoliť zovšeobecnené súradnice, je tento problém triviálny. Hmotný bod totižto kopíruje svojou trajektóriou lineárnu funkciu zo sklonom α. Prevod medzi kartézskymi a zovšebecnenými súradnicami bude preto

$$x_m = x\,,$$
$$y_m = x \operatorname{tg} \alpha\,.$$

Čo nám dáva analogickým spôsobom ako v prvých dvoch úlohách vzťah pre kinetickú energiu

$$T = \frac{1}{2} m\dot{x}^2 \left(1 + \operatorname{tg}^2 \alpha\right)\,.$$

A takisto aj pre potenciálnu energiu

$$V = mgx \operatorname{tg} \alpha\,.$$

Lagrangeova funkcia bude potom samozrejme

$$L = \frac{1}{2} m\dot{x}^2 \left(1 + \operatorname{tg}^2 \alpha\right) - mgx \operatorname{tg} \alpha\,.$$

Napriek tomu, že sme to v seriáli explicitne neprerieśili na príklade, bolo v ňom odvodené, ako majú Lagrangeove rovnice vyzerať, čo nám dáva návod, ako ich zostaviť, keď máme Lagrangeovu funkciu. V našom prípade najprv parciálne derivujeme L podľa $\dot{x}$ a výsledok následne podľa času. Od toho ešte odčítame deriváciu L podľa x a celé to položíme rovné nule. Lagrangeova rovnica (bude samozrejme len jedna) má teda tvar

$$m\ddot{x} \left(1 + \operatorname{tg}^2 \alpha\right) + mg \operatorname{tg} \alpha = 0\,.$$

Rovnicu upravíme

$$\ddot{x} = -\frac{g \operatorname{tg} \alpha}{1 + \operatorname{tg}^2 \alpha} = -g \sin \alpha \cos \alpha\,.$$

Tento vzťah stačí dvakrát preintegrovať, čím dostanem

$$x = -\frac{1}{2} g t^2 \sin \alpha \cos \alpha + C_1 t + C_2\,,$$

kde C_1 má význam počiatočnej rýchlosti a C_2 má význam počiatočnej polohy. Ak počiatočná rýchlosť bola nulová a počiatočná výška nad zemou h, pričom sme počiatok súradnicovej sústavy položili do bodu, kde sa pretína naklonená rovina s podložkou, potom v kartézskych súradniciach pre $t = 0$ z rovnice pre y máme

$$h = x \operatorname{tg} \alpha\,,$$
$$x = \frac{h}{\operatorname{tg} \alpha}\,.$$

Kompletné riešenie tejto úlohy je

$$x = -\frac{1}{2} g t^2 \sin \alpha \cos \alpha + \frac{h}{\operatorname{tg} \alpha}\,.$$

Teraz to v rýchlosti skontrolujeme so stredoškolským riešením. Rozložíme tiažovú silu v smere rovnobežnom a kolmom so šikmou rovinou. Vidíme, že na teleso pôsobí len sínusová zložka gravitačného zrýchlenia

$$a = g\sin\alpha\,,$$

z čoho je dráha prejdená z pokoja za čas t pri tomto konštantnom zrýchlení

$$a = \frac{1}{2}gt^2\sin\alpha\,.$$

Aby sme to ale mohli porovnať s našim výsledkom vypočítaným cez Lagrangeove rovnice, musíme to trochu upraviť. Našou zvolenou zovšeobecnenou súradnicou bola x-ová súradnica telesa. Chceme teda vedieť posun telesa v x-ovom smere. Ten získame tak, že získanú dráhu prenásobíme kosínusom uhlu α. Teleso sa zároveň pohybuje v opačnom smere ako je smer osy x, preto bude tento člen záporný. Nazáver musíme ešte pripočítať x-ovú súradnicu východzieho bodu. Východzí bod je charakterizovaný výškou (y-novou súradnicou) h. Musí preto platiť

$$h = x_0\,\mathrm{tg}\,\alpha\,.$$

Z toho jednoducho vyjadríme počiatočnú súradnicu x_0 a dosadíme do stredoškolsky získaného tvaru rovnice, čím dostaneme rovnaký výraz, ako pri výpočte skrz Lagrangeove rovnice.

Jakub Jambrich
`jakubj@fykos.cz`