

**Úloha III.E . . . indexovaný kondenzátor** 12 bodů; průměr 8,97; řešilo 31 studentů

Poštou vám přišel elektrolytický kondenzátor a rezistor. Změřte kapacitu kondenzátoru a odpor rezistoru, neměřte je však přímo. Součin kapacity kondenzátoru a odporu rezistoru je přibližně  $RC \approx 20$  s.

Varování: Elektrolytický kondenzátor má kladnou a zápornou elektrodu, při zapojení opačně ho můžete zničit. Maximální dovolené napětí je 10 V.

*Dodo právě v praktiku měřil rezonanci.*

**Odpor rezistoru**

Najskôr si zistíme odpor rezistoru. Máme ale zakázané merať ho priamo, nezostáva nám teda nič iné, než použiť Ohmov zákon. Pripojíme rezistor ku zdroju, odmeriame napätie na jeho koncoch a prúd, ktorý ním preteká, a dosadíme do známeho vzťahu.

Pri napätí treba pripojiť multimeter k tým dvom bodom obvodu, medzi ktorými chceme vedieť napätie, a teda paralelne k rezistoru. Keďže batéria uvádza 4,5 V nastavíme na multimetri rozsah 20 V (pretože 2 V by bolo zjavne málo a nič medzi tým nemáme k dispozícii).

Pri meraní prúdu zas treba, aby tento prúd multimetrom priamo pretekal, a teda ho zapojíme sériovo. Ak sa bojíte, že prepálite multimetru poistky, tak ho najprv nastavte na najväčší rozsah prúdu a postupne uberajte (zvyšujte presnosť), dokým sa dá.

My sme pri meraní použili vzorku 5 rezistorov, pričom sa dalo čakať, že možno medzi nimi budú nejaké drobné rozdiely, ale ukázalo sa, že pri všetkých rezistoroch sme dostali napätie  $U = 4,84$  V a prúd  $I = 96 \mu\text{A}$ . Čo z toho vyplýva? Štatistická chyba odporov rezistorov vo výrobe je zanedbateľná v porovnaní s nepresnosťou merania. Tá je v prípade nášho multimetra  $\pm(1\% + 2\text{digit})$  pri meraní prúdu a  $\pm(0,5\% + 2\text{digit})$  pri meraní napätia. Čiže  $\Delta I = 3 \mu\text{A}$  a  $\Delta U = 0,04$  V. Pri delení dvoch veličín sa sčítajú štvorce ich relatívnych chýb. Takže odpor rezistoru je

$$R = \frac{U}{I} \left( 1 \pm \sqrt{\left(\frac{\Delta I}{I}\right)^2 + \left(\frac{\Delta U}{U}\right)^2} \right) = (50,4 \pm 1,6) \text{ k}\Omega.$$

**Trochu teórie**

Kapacita kondenzátoru  $C$  udáva pomer medzi nábojom  $Q$  v ňom uloženým a napätím  $U$  na jeho svorkách, teda  $C = Q/U$ . Podobne, odpor rezistoru  $R$  vyjadruje pomer napätia a prúdu, ktorý ním preteká,  $R = U/I$ . Čo je to prúd? Usporiadaný pohyb nabitých častíc. Jeho veľkosť udáva, aký náboj prešiel vodičom za jednotku času, čiže  $I = Q/t$ .

Čo sa teda stane, keď spojíme konce nabitého kondenzátoru rezistorom? Na svorkách rezistoru bude rovnaké napätie ako na kondenzátore a teda ním začne tiecť prúd veľkosti

$$I = \frac{U}{R} = \frac{Q}{RC}.$$

Tento prúd tvoria elektróny bežiacie zo záporne nabitej elektródy kondenzátora na tú druhú (resp. hypotetické kladné náboje bežiacie presne opačným smerom). Čiže náboj a s ním teda aj napätie na kondenzátore bude postupne klesať. Tým pádom bude klesať aj prúd, čiže dostávame diferenciálnu rovnicu

$$-\frac{dQ}{dt} = \frac{Q}{RC},$$

kde sme len za prúd z predchádzajúceho vzťahu dosadili zmenu náboja za čas. Mínus je tam preto, lebo náboj na kondenzátore týmto procesom klesá.

Táto rovnica sa dá riešiť jednoducho separáciou premenných, ktorej výsledkom je

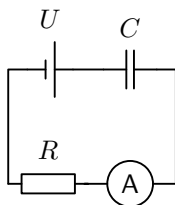
$$Q(t) = Q(0)e^{-\frac{t}{RC}}.$$

Lenže náboj merať nevieme (minimálne bežne multimeter takú možnosť neponúka). Zato vieme merať prúd a napätie, čiže máme dve možnosti: buď vydeliť obe strany kapacitou, alebo obe strany zderivovať podľa času. Tým dostaneme časový vývoj napätia na kondenzátore, resp. prúdu tečúceho vodičom

$$\begin{aligned} U(t) &= U(0)e^{-\frac{t}{RC}}, \\ I(t) &= I(0)e^{-\frac{t}{RC}}. \end{aligned} \quad (1)$$

Vidíme, že oba vzťahy sú analogické, takže je vlastne jedno, ktorý z nich použijeme. Ukážeme si samozrejme oba.

Zostáva otázka, ako vlastne zapojiť obvod. Schémy zapojenia sa nachádzajú na obrázkoch 1 a 2.



Obr. 1: Zapojenie pri meraní prúdu

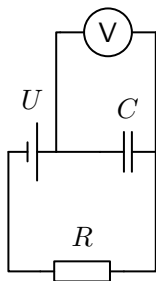
### Meranie prúdu

V tomto prípade rovno za kondenzátor zapojíme multimeter. Z predchádzajúceho merania už vieme aký prúd máme očakávať. Multimeter teda momentálne ukazuje, ako rýchlo sa kondenzátor nabíja. Tento prúd tiež exponenciálne klesá, takže je dôležité určiť si hodnotu prúdu, pri ktorej nabíjanie ukončíme. Nie je až tak dôležité akú, ale hlavne musí byť pri každom meraní rovnaká. My sme sa rozhodli, že nabíjanie ukončíme pri  $3\mu\text{A}$ . Takto trvalo nabíjanie niečo cez 2 minúty.

Keď donabíjame, treba spraviť súčasne dve veci - odpojiť baterku (stačí jeden kábel) a spustiť stopky. Potom už len sledujeme stopky a každých 5 sekúnd pozrieme na multimeter a poznačíme si hodnotu prúdu. Meranie sme vykonali pre päť kondenzátorov tak, že sme tento postup zopakovali pre každý z nich, ale ako vidno z tabuľky 1, štatistická chyba je opäť rozumne malá.

Takže sme zmerali vývoj prúdu v čase. Otázka znie, ako z toho určiť kapacitu. Najjednoduchší spôsob je použiť nejaký software, ktorý nám naše dáta fitne exponenciálou.<sup>1</sup>

<sup>1</sup>RStudio, gnuplot, ...



Obr. 2: Zapojenie pri meraní napätia

Tab. 1: Namerané časové priebehy prúdu

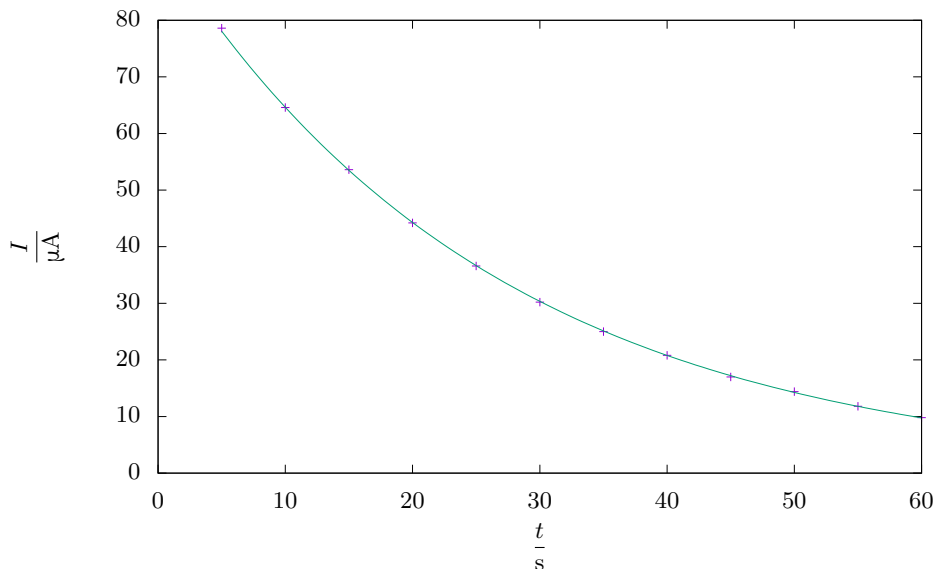
$t$ s	$I$ $\mu\text{A}$						$\bar{I}$ $\mu\text{A}$
5	78	78	80	78	79	78,6	
10	65	65	65	64	64	64,6	
15	54	53	54	53	54	53,6	
20	44	44	44	44	45	44,2	
25	36	37	36	37	37	36,6	
30	30	30	30	30	31	30,2	
35	25	25	25	25	25	25,0	
40	20	21	21	21	21	20,8	
45	17	17	17	17	17	17,0	
50	14	14	14	15	15	14,4	
55	11	12	12	12	12	11,8	
60	9	10	10	10	10	9,8	

Okrem toho, že sa môžeme na grafe 3 pokochať, ako všetky body ležia na danej krivke, sa dozvieme aj to, aký má táto krivka predpis. V našom prípade dostávame  $f(x) = 94,3 \cdot \exp(-0,0378x)$ . Čo keď porovnáme s (1) zistujeme, že

$$\begin{aligned}
 -\frac{t}{RC} &= -0,0378, \\
 RC &= 26,5 \text{ s}, \\
 C &= 525 \mu\text{F}.
 \end{aligned}$$

Zároveň si môžeme všimnúť, že  $I(0) = 94,3 \mu\text{A}$ , čo je o pár mikroampérov menej, než prúd, ktorý sme namerali v prvej časti. Náhoda? Samozrejme, že nie. K tejto skutočnosti sa na záver vrátíme.

Ak ale nechceme fitovať namerané dáta pomocou nejakého „black boxu“, môžeme to spraviť



Obr. 3: Závislost prúdu v obvode na čase pri vybíjaní kondenzátora

aj sami pomocou linearizácie. Keď zlogaritmujeme obe strany (1) dostávame, že

$$\ln I(t) = \ln I(0) - \frac{t}{RC},$$

čiže ak si nakreslíme graf závislosti logaritmu prúdu (keďže do argumentu logaritmu by malo ísť bezrozmerné číslo, budeme logaritmovať  $I/I_n$ , kde sme si zvolili  $I_n = 1 \mu\text{A}$ ) na čase, mal by byť lineárny, so smernicou  $-(RC)^{-1}$ , viď graf 4.

Smernicu určíme z krajných bodov

$$k = \frac{\Delta f(t)}{\Delta t} = -0,0379 \text{ s}^{-1}.$$

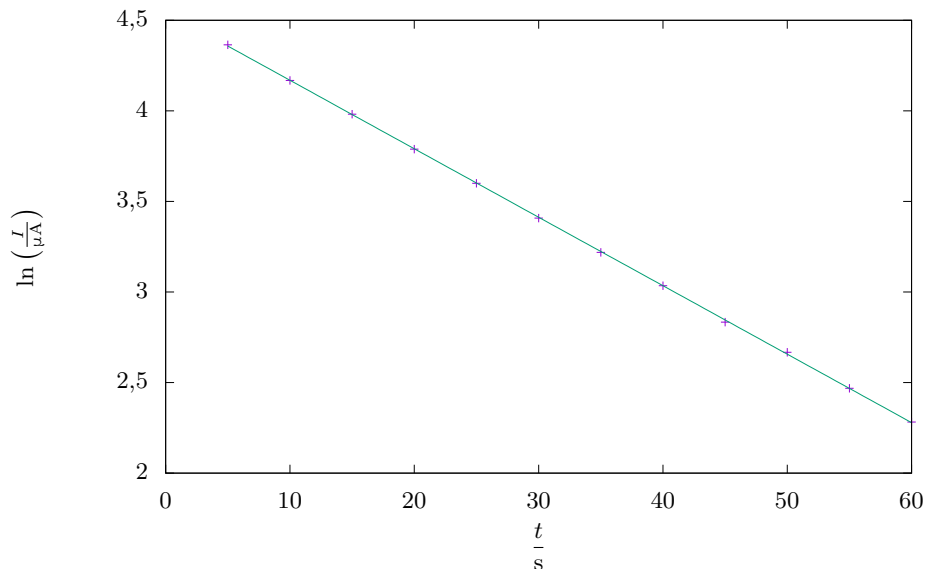
Z toho vyplýva, že  $C = 524 \mu\text{F}$ , čo je vlastne to isté, ako pri použití „black boxu“. Presnejšie by ale bolo vykonať lineárnu regresiu.

Ďalej by bolo vhodné určiť chybu. Štvorec relatívnej chyby kapacity je súčet štvorcov relatívnych chýb odporu (tú sme určili v prvej časti) a relatívnej chyby, s ktorou sme určili smernicu.

Keď si za oba prúdy, ktoré používame na určenie smernice dosadíme  $I + u_I$ , kde pod  $u_I$  myslíme absolútnu chybu daného prúdu, po chvíli hrania sa s logaritmi a limitami sa dá dôjsť k záveru, že absolútna chyba smernice je

$$u_k = \frac{1}{u_t} \left( \frac{u_{I_1}}{I_1} + \frac{u_{I_2}}{I_2} \right),$$

čiže súčet relatívnych chýb prúdov deleno časový rozdiel. Ako absolútnu chybu prúdu opäť použijeme dva krát najmenší dielik plus percento nameranej hodnoty a dostávame, že relatívna



Obr. 4: Linearizovaná závislost

chyba smernice je  $\delta_s = 0,004$ . To spolu s relatívnou chybou odporu dáva  $u_C = 0,03$ . Po vynásobení kapacitou, dostaneme  $C = (520 \pm 20) \mu\text{F}$ .

### Meranie napätia

Tentokrát treba zapojiť multimeter ku kondenzátoru paralelne. Rozhodli sme sa nabíjať, dokým nebolo napätie  $4,83 \text{ V}$ , čo trvalo asi sekundu.

Dalo by sa samozrejme postupovať úplne rovnako ako minule a v pevne stanovených časoch merať hodnotu napätia. Pre zmenu to ale spravíme naopak. A síce, zmeriame časový rozdiel medzi dvoma pevne stanovenými hodnotami napätia. Tie sme si stanovili ako  $U_1 = 4 \text{ V}$  a  $U_2 = 2 \text{ V}$ . Dôležitý je hlavne ich pomer. Dosadením do (1) zisťujeme, že ak čas, ktorý uplynie medzi tým, kým klesne napätie z  $U_1$  na  $U_2$ , označíme  $\Delta t$ , môžeme  $C$  vyjadriť ako

$$C = \frac{\Delta t}{R \ln 2}.$$

Spravili sme 5 meraní (opäť jedno pre každý kondenzátor) a určili priemer a smerodajnú odchýlku  $\Delta t = (16,9 \pm 0,4) \text{ s}$ .

Po dosadení do vzťahu vyššie dostávame  $C = (480 \pm 20) \mu\text{F}$ .

## Diskusia

Průžky na rezistory mají postupně farby: zelená, hnědá, černá, červená, hnědá. Na internete se dá najít veľa rôznych možností ako ich dekodovať<sup>2</sup> Zisťujeme, že výrobca udáva, že rezistor by mal mať odpor  $R_v = (51,0 \pm 0,5) \text{ k}\Omega$ . Tento interval je celý vnútri intervalu, ktorý sme určili našim meraním, čiže hodnotu odporu sme určili správne.

Výsledky kapacity získané meraním prúdu a meraním napätia sa dosť výrazne líšia. Môže nás napadnúť, či to nemôže byť spôsobené inou použitou metódou. Tak sme skúsili aplikovať metódu merania napätia aj na meranie prúdov. Prúd klesol na polovicu (z  $80 \mu\text{A}$  na  $40 \mu\text{A}$ ) v priemere za 18,2s, čo zodpovedá kapacite  $C = 520 \mu\text{F}$  (čiže takej istej ako sme pri meraní prúdu určili pôvodne), takže je problém niekde inde.

Hodnota kapacity, ktorú udáva výrobca je  $C = 470 \mu\text{F}$ . Tá spadá do intervalu chyby pri meraní napätia, avšak nie pri meraní prúdu. To nám teda dáva nápovedu, ktoré z meraní je vlastne zle.

A kde konkrétne je tá chyba? Vráťme sa späť k odvodeniu vzťahu (1). Tam sme si povedali, že  $R$  je odpor, ktorý stojí medzi svorkami rezistoru. Pri meraní sme predpokladali, že tento odpor je  $R = (50,4 \pm 1,6) \text{ k}\Omega$ , čo však nebola tak úplne pravda. Sérioivo s našim rezistorom bol totiž zapojený multimeter! Bol zapojený ako ampérmeter, takže jeho vnútorný odpor bol veľmi malý (preto sme namerali skoro správnu hodnotu), ale stále bol dosť veľký na to, aby nezanedbateľne ovplyvnil meranie.

Keď sa ale pozrieme na meranie napätia, vidíme, že aj tam mohol multimeter ovplyvniť meranie. Tentokrát presne opačným spôsobom. Keďže bol zapojený ako voltmeter paralelne s našim rezistorom, skutočný odpor, cez ktorý sa kondenzátor vybíjal bol menší, než sme počítali, čiže by sme mali pre zmenu dostať hodnotu kapacity nižšiu ako reálna hodnota. Ale ostatné chyby v tomto prípade prevážili nad nedokonalosťou voltmetru.

S použitím ďalšieho multimetru by sme mohli odmerať vnútorný odpor v jednotlivých prípadoch a použiť ho na korekciu výsledkov. Do hry však vstupujú aj prechodové odpory v miestach zapojení jednotlivých súčiastiek, či vnútorný odpor samotného kondenzátora. Určiť presne kapacitu kondenzátora týmito metódami je teda pomerne komplikované, najlepšie je totižto použiť striedavý prúd a zmerať indukčanciu kondenzátora, alebo určiť priamo rezonančnú frekvenciu kmitov príslušného RC zapojenia.

## Záver

Hodnotu odporu rezistoru sme určili ako  $R = (50,4 \pm 1,6) \text{ k}\Omega$ , čo sa zhoduje s hodnotou zadanou výrobcom  $R_v = (51,0 \pm 0,5) \text{ k}\Omega$ . Meraním vývoja prúdu v čase sme dostali kapacitu  $C = (520 \pm 20) \mu\text{F}$ . Meraním vývoja napätia v čase sme dostali kapacitu  $C = (480 \pm 20) \mu\text{F}$ . Výrobca udáva  $C = 470 \mu\text{F}$ , čo znamená, že meraním napätia sme dostali správny výsledok, zatiaľ čo meraním prúdu sme dostali výrazne chybný výsledok, dôvodom bol nenulový vnútorný

<sup>2</sup><https://www.digikey.com/en/resources/conversion-calculators/conversion-calculator-resistor-color-code-4-band>

odpor ampérmetra.

*Šimon Pajger*  
legolas@fykos.cz

---

Fyzikální korespondenční seminář je organizován studenty MFF UK. Je zastřešen Oddělením propagace a mediální komunikace MFF UK a podporován Ústavem teoretické fyziky MFF UK, jeho zaměstnanci a Jednotou českých matematiků a fyziků.

Toto dílo je šířeno pod licencí Creative Commons Attribution-Share Alike 3.0 Unported.  
Pro zobrazení kopie této licence navštivte <http://creativecommons.org/licenses/by-sa/3.0/>.