

Úloha II.5 ... kladka a pták

9 bodů; průměr 3,16; řešilo 37 studentů

Ke stropu je zavěšená pevná kladka a je na ni navlečeno lano tak, aby jeho levý i pravý konec byly ve stejné hloubce. Na jednom konci visí pták Fykosák a na druhém konci závaží, které má stejnou hmotnost jako pták. V počátečním stavu jsou pták i závaží nehybné. Popište, co se bude se soustavou dít, začne-li pták Fykosák létat vzhůru (po svém vlastním lanu) s použitím konstantní síly. Nejprve předpokládejte, že lano je nehmotné a kladka je ideální. Poté počítejte s délkovou hmotností lana λ , jeho délkou l , momentem setrvačnosti kladky J a jejím poloměrem r . Předpokládejte, že lano na kladce neprokluzuje.

Mirek přepsal úlohu od Lewise Carolla do FYKOSího tvaru.

Úlohu budeme řešit pomocí rozboru sil. Pták Fykosák stahuje lano dolů silou F . Tato síla musí být zřejmě větší než jeho tíha, jinak by se na laně neudržel. Síla se pomocí lana přenese na druhé těleso, na které tak budou působit dvě síly – tíhová síla F_g směrem dolů (která je podle zadání stejná jako Fykosáková) a síla F směrem nahoru. Označme nyní hmotnost Fykosáka a závaží m , potom můžeme určit velikost zrychlení, s jakým se závaží začne pohybovat směrem nahoru

$$a = \frac{F - F_g}{m} = \frac{F}{m} - g.$$

Na ptáka Fykosáka působí také síla F směrem nahoru a tíhová síla F_g směrem dolů, takže i on se bude pohybovat se zrychlením a směrem nahoru.

Není to ale v rozporu se zákonem zachování energie? Pokud by pták Fykosák šplhal například po žebříku, při působení stejné síly F by se zřejmě pohyboval se stejným zrychlením a . V tomto případě se tak závaží zvedá „zdarma“. Nebo snad ne?

Rozpor je samozřejmě pouze zdánlivý. Fykosák působí silou na lano, tedy při výpočtu práce musíme sílu integrovat podle délky lana. To se pohybuje dolů stejnou rychlostí, jakou se Fykosák pohybuje nahoru. Síla tedy působí na dvakrát delší dráze než v případě, že by Fykosák lezl po žebříku.

Ve druhé části úlohy uvažujeme hmotné lano a kladku s nenulovým momentem setrvačnosti. Kladka dělí lano na dvě části. Označme délku té s ptákem Fykosákem jako x . Na tuto část lana působí směrem dolů síla $F + \lambda xg$, zatímco na druhou část lana působí směrem dolů síla $(m + (l - x))g$. V tomto případě jsme zanedbali rozměry kladky vůči délce lana. Dále necht' je zrychlení závaží a' . Potom výslednicí těchto sil je výraz

$$\left(m + \lambda l + \frac{J}{r^2}\right) a',$$

kde první člen představuje zrychlení závaží, druhý zrychlení lana a třetí zrychlení kladky. Máme tak rovnici

$$\left(m + \lambda l + \frac{J}{r^2}\right) a' = F + \lambda xg - (m + \lambda(l - x))g,$$

odkud si můžeme vyjádřit

$$a' = \frac{F + 2\lambda xg - \lambda l g - mg}{m + \lambda l + Jr^{-2}}.$$

Dostali jsme diferenciální rovnici typu $\ddot{x} = b + cx$. Řešením homogenní rovnice je

$$x_H = C_1 e^{\sqrt{ct}} + C_2 e^{-\sqrt{ct}}.$$

Partikulárním řešením je zřejmě

$$x_P = -\frac{b}{c},$$

tedy pro celkové řešení platí

$$x = x_H + x_P = C_1 e^{\sqrt{c}t} + C_2 e^{-\sqrt{c}t} - \frac{b}{c}.$$

Z počátečních podmínek $x(0) = l/2$ a $\dot{x}(0) = 0$ dostáváme dosazením do této rovnice soustavu

$$\begin{aligned} C_1 + C_2 - \frac{b}{c} &= \frac{l}{2}, \\ C_1 \sqrt{c} - C_2 \sqrt{c} &= 0, \end{aligned}$$

jejímž řešením je

$$C_1 = C_2 = \frac{l}{4} + \frac{b}{2c} = \frac{l}{4} + \frac{F - \lambda l g - mg}{4\lambda g} = \frac{F - mg}{4\lambda g}.$$

Tím jsme našli funkci $x(t)$. Jejím dosazením do rovnic výše snadno spočítáme například zrychlení závaží a' . Jak již určitě tušíte, pohyb ptáka Fykosáka nebude zdaleka tak složitý. Ve skutečnosti bude zcela stejný jako v první části úlohy – síly, co na něj působí, se nezměnily, takže i jeho pohyb se nezmění. Pro jeho zrychlení tak platí

$$a = \frac{F}{m} - g.$$

Poznámky k došlým řešením

Pro řešení této úlohy je zcela zásadní správně provést rozbor sil. Jestliže Fykosák leze nahoru s použitím konstantní síly, znamená to, že na lano působí nějakou silou F . Někteří z vás uvažovali, že na lano působí silou $F' + mg$, tedy že síla F' je jakési navýšení základní mg , díky které se pták drží na laně. To je ale jen otázkou značení, proto jsme za to nestrhávali body.

Pokud Fykosák působí silou F (resp. $F' + mg$) na lano, ze zákona akce a reakce vyplývá, že lano musí působit stejně velkou silou opačného směru na něj. Celkem na ptáka působí právě dvě síly – síla od lana F a jeho vlastní tíhová síla mg . Tyto síly mají rozdílný směr, tedy výslednice ve směru nahoru má velikost $F - mg$ (resp. F'). Zrychlení je pak už jen podíl síly a hmotnosti.

Dále není vůbec nutné počítat s něčím jako je napětová síla lana – stačí si uvědomit, že lano „přenáší“ sílu z jednoho konce na druhý. Kladka v tomto případě pouze obrací směr přenášené síly. Tedy pták Fykosák působí silou F na lano směrem dolů a tato síla se přenesla na závaží, na které lano působí silou F směrem nahoru. Na závaží tak působí stejné síly, jako na ptáka, a sice F a mg .

Důležité je, že tento přístup je obecně platný. Ve druhé části se změnila vlastnost lana a kladky, ale stále zůstalo v platnosti, že pták Fykosák leze nahoru s využitím konstantní síly. Potom i síly působící na něj budou stejné jak v první části a tedy bude stejné i jeho zrychlení.

Jáchym Bárták
tuaki@fykos.cz

Fyzikální korespondenční seminář je organizován studenty MFF UK. Je zastřešen Oddělením propagace a mediální komunikace MFF UK a podporován Ústavem teoretické fyziky MFF UK, jeho zaměstnanci a Jednotou českých matematiků a fyziků.

Toto dílo je šířeno pod licencí Creative Commons Attribution-Share Alike 3.0 Unported.
Pro zobrazení kopie této licence navštivte <http://creativecommons.org/licenses/by-sa/3.0/>.