## Úloha II.4 ... lunar lander

7 bodů; (chybí statistiky)

*Jak má řídící elektronika přistávacího modulu Apolla dávkovat tah $T$ motoru (a tedy regulovat spotřebu paliva) směřující směrem dolů, aby se loď snášela na povrch Měsíce rovnoměrným přímočarým pohybem? Efektivní rychlost spalin motoru je $u$. Loď již zbrzdila svůj pohyb po orbitě a sestupuje přímo dolů v homogenním gravitačním poli se zrychlením $g$. Počáteční hmotnost modulu je $m_0$.*

*Bonus Jak má elektronika dávkovat tah při přistání z výšky $h$ a počáteční rychlosti $v_0$, aby přistání bylo tzv. pádem z nulové výšky a minimalizovala se spotřeba paliva? Maximální tah motoru je $T_{\max}$.*

*Michal na webu.*[1]

Pri riešení tejto úlohy je dôležité uvedomiť si, že sa jedná o sústavu s premennou hmotnosťou. Pohybovú rovnicu systému určíme z prvého Newtonovho zákona

$$F = \frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}t}\,.$$

Nech je v nejakom čase $t$ hybnosť sústavy $p(t) = m(t)v(t)$, pričom hybnosť $p$ aj rýchlosť $v$ sú kladné smerom nahor. Keďže je rýchlosť modulu $v$ konštantná, za čas $\Delta t$ sa hybnosť zmení na

$$p(t + \Delta t) = (m(t) + \Delta m)\, v - \Delta m\,(v - u)\ ,$$

kde $\Delta m\,(v - u)$ je práve hybnosť paliva vyvrhnutého smerom nadol z motorov modulu. Pre nekonečne malú zmenu času prejdeme od $\Delta t$ k diferenciálu $\mathrm{d}t$, odkiaľ

$$\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}t} = \frac{p(t + \mathrm{d}t) - p(t)}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}m}{\mathrm{d}t}u\,.$$

Na pristávací modul pôsobí jediná sila, sila gravitačná $F = -F_g = -m(t)g$. Po dosadení do prvého Newtonovho zákonu dostávame

$$-m(t)g = \frac{\mathrm{d}m(t)}{\mathrm{d}t}u = -T\,.$$

Riešime teda diferenciálnu rovnicu

$$-\frac{g}{u}m = \frac{\mathrm{d}m}{\mathrm{d}t}\ ,$$

ktorej riešením je

$$m(t) = m_0 \exp\left(-\frac{g}{u}t\right)\ ,$$

kde $m_0$ je hmotnosť landeru v čase $t = 0\,\mathrm{s}$. Spotrebu paliva máme jednoducho ako

$$-\frac{\mathrm{d}m}{\mathrm{d}t} = \frac{m_0 g}{u}\exp\left(-\frac{g}{u}t\right)$$

a pre veľkosť ťahu motora požadujeme

$$T(t) = m_0 g \exp\left(-\frac{g}{u}t\right)\ ,$$

aby modul klesal rovnomerne priamočiaro.

[1] `http://www.root.cz/clanky/historie-vyvoje-pocitacovych-her-2-cast-vek-simulaci/`

## *Bonus*

V tomto prípade máme pohybovú rovnicu

$$mg = -\dot{m}u - m\ddot{x}\,,$$

kde kladný smer súradnice $x$ smeruje nahor, z čoho po úprave máme

$$g + \ddot{x} = -\frac{\dot{m}}{m}u\,.$$

Po integrácii podľa času po čas dopadu $t_\mathrm{d}$ máme

$$gt_\mathrm{d} + \left[\dot{x}\right]_0^{t_\mathrm{d}} = -u\left[\ln\left(m\right)\right]_0^{t_\mathrm{d}}\,, \tag{1}$$

$$\frac{gt_\mathrm{d} - v_0}{u} = \ln\left(\frac{m_0}{m_{t\mathrm{d}}}\right)\,,$$

kde sme použili $v(t_\mathrm{d}) = 0$. Vidíme teda, že pre minimálnu spotrebu paliva musíme pristáť čo najrýchlejšie. Riešením by bolo tesne pred dosadnutím prudko spomaliť, to však nie je technicky možné. Najlepšie je teda voľne padať a následne vo vhodnom čase spustiť motory na plný ťah tak, aby modul dosadol s nulovou rýchlosťou.

Ak v čase $t_0 = 0\,\mathrm{s}$ začneme brzdiť konštantným ťahom, pre hmotnosť landeru máme

$$m(t) = m_0 - \frac{T_\mathrm{max}}{u}t\,.$$

To po dosadení do rovnice (1) pre medze s indexom 0 pre čas začatia brzdenia a bez indexu v čase $t$ počas brzdenia a úprave dáva

$$v(t) = v_0 - gt - u\ln\left(1 - \frac{T_\mathrm{max}}{um_0}t\right)\,.$$

Ak tento vzťah znovu preintegrujeme a dosadíme medzu pre začiatok brzdenia, dostaneme

$$x(t) = h_0 + v_0t - \frac{1}{2}gt^2 - u\left(\left(t - \frac{um_0}{T_\mathrm{max}}\right)\ln\left(1 - \frac{T_\mathrm{max}}{um_0}t\right) - t\right)\,,$$

kde $h_0$ je výška landeru nad povrchom v čase začatia brzdenia. Pár poznámok k výsledku. Pre $T = 0$, teda bez ťahu motorov, dostávame vzťahy pre voľný pád (odporúčame použiť Taylorov rozvoj na logaritmus). Vzťah v argumente logaritmu je podiel aktuálnej hmotnosti lode a jej hmotnosti v počiatočnom čase, teda je kladný, pokým lodi nedôjde palivo a pohybová rovnica prestane platiť.

Ako má teda elektronika lode rozhodovať? V každom okamihu voľného pádu vieme zo vzťahu pre rýchlosť položením $v = 0\,\mathrm{m\cdot s^{-1}}$ určiť čas $t$ (napríklad numericky), v ktorom bude mať lander nulovú rýchlosť. Tento čas dosadíme do vzťahu pre výšku nad povrchom $x(t)$. Brzdiť je potrebné začať v okamihu, keď sa takto určená výška rovná aktuálnej výške landeru nad povrchom. V praxi sa často prestane brzdiť tesne nad povrchom a lander sa nechá dopadnúť voľným pádom z malej výšky, aby motory zbytočne nevírili prach na povrchu.

***Jozef Lipták***
`liptak.j@fykos.cz`

Fyzikální korespondenční seminář je organizován studenty MFF UK. Je zastřešen Oddělením propagace a mediální komunikace MFF UK a podporován Ústavem teoretické fyziky MFF UK, jeho zaměstnanci a Jednotou českých matematiků a fyziků.