Úloha II.1 ... moonmen

3 body; (chybí statistiky)

Vaše váha by byla při Měsíci v zenitu menší než při Měsíci v nadiru. O kolik?

Matěj zřejmě doufá, že v tu chvíli něco snadněji postaví.

Nejprve si ujasníme, že naše hmotnost nezávisí vůbec na poloze měsíce ani na tom, na jaké planetě se nacházíme. Váha je však veličina, kterou ukazují váhy, když se na ně postavíme. Váhy měří pouze sílu, tu pak přepočítávají na hmotnost, přičemž používají standardní hodnotu tíhového zrychlení $g = 9{,}81\,\mathrm{m\cdot s^{-2}}$.

Proto nás bude zajímat pouze rozdíl sil v případě, když je Měsíc v zenitu a když je v nadiru. Naši hmotnost označme m. Hmotnost Měsíce budeme značit $M = 7{,}35\cdot 10^{22}\,\mathrm{kg}$, jeho vzdálenost od středu Země $R = 384\,000\,\mathrm{km}$ a poloměr Země $r = 6\,378\,\mathrm{km}$. Při výpočtu síly, kterou na nás působí Měsíc, vyjdeme z Newtonova gravitačního zákona

$$F = G\frac{mM}{(R-r)^2}\,,$$

kde G je Newtonova gravitační konstanta. Protože vzdálenost Měsíce od Země je o dva řády větší než poloměr Země, můžeme r zanedbat a počítat pouze se vzdáleností R. Když se Měsíc nachází v nadiru (podnožníku), působí na nás silou F směrem od Země. Když se nachází v zenitu (nadhlavníku), přitahuje nás silou F k Zemi. Celkový rozdíl je tedy $2F$. Tomu odpovídá změna váhy

$$\Delta m = \frac{2F}{g} = \frac{2GmM}{gR^2}\,,$$

Z použitých veličin neznáme naši hmotnost m, proto odhadneme průměrnou hmotnost fykosáka na $m = 70\,\mathrm{kg}$. Po dosazení máme $\Delta m = 0{,}47\,\mathrm{g}$. Budete-li se vážit přesně pod Měsícem, budete vážit přibližně o polovinu gramu méně než v druhém případě.

Skrytý bonus

Gravitační síla však není jednou silou, která na nás působí. Ještě je tu odstředivá síla, která vzniká tak, že se otáčíme kolem težiště soustavy Země–Měsíc.

Úhlová rychlost otáčení této soustavy buď ω, hmotnost Země nechť je $M_{\mathrm{Z}} = 5{,}97\cdot 10^{24}\,\mathrm{kg}$. Těžiště soustavy se potom nachází ve vzdálenosti

$$\frac{M}{M_{\mathrm{Z}}+M}R$$

od středu Země směrem k Měsíci, což je pod zemským povrchem. Velikost odstředivé síly v okamžiku, kdy máme Měsíc přesně pod nohama, je

$$F_1 = m\omega^2\left(r + \frac{M}{M_{\mathrm{Z}}+M}R\right)\,.$$

Když je Měsíc v opačné pozici, pro odstředivou sílu platí

$$F_2 = m\omega^2\left(r - \frac{M}{M_{\mathrm{Z}}+M}R\right)\,.$$

Abychom dosáhli požadované přesnosti, nemůžeme při výpočtu síly F zanedbat zemský poloměr. Počítejme tedy se silou F_a pro měsíc v podnožníku a F_b pro měsíc v nadhlavníku. Výsledný rozdíl sil bude

$$\begin{aligned}\Delta F &= (F_\mathrm{a} - F_1) - (-F_\mathrm{b} - F_2) = \frac{GmM}{(R+r)^2} + \frac{GmM}{(R-r)^2} - \frac{2m\omega^2 MR}{M_\mathrm{Z} + M} = \\ &= GmM\left(\frac{1}{(R+r)^2} + \frac{1}{(R-r)^2} - \frac{2}{R^2}\right),\end{aligned}$$

kde jsme za ω dosadili z třetího Keplerova zákona

$$\omega^2 = \frac{G\left(M_\mathrm{Z} + M\right)}{R^3}\,.$$

Dále můžeme vzorec pro změnu síly upravit na

$$\begin{aligned}\Delta F &= GmM\left(\frac{R^2 - (R+r)^2}{(R+r)^2 R^2} + \frac{R^2 - (R-r)^2}{(R-r)^2 R^2}\right),\\ \Delta F &= GmM\frac{r}{R^2}\left(\frac{-2R-r}{(R+r)^2} + \frac{2R-r}{(R-r)^2}\right),\\ \Delta F &= GmM\frac{r}{R^2}\left(\frac{(-2R-r)(R-r)^2 + (2R-r)(R+r)^2}{(R+r)^2(R-r)^2}\right),\\ \Delta F &\approx GmM\frac{6r^2}{R^4}\,.\end{aligned}$$

Pro rozdíl vah po dosazení $a_\mathrm{g} = \frac{GM_\mathrm{Z}}{r^2}$ (zde zanedbáváme odstředivou sílu způsobenou rotací Země, ale chyba způsobená tímto zanedbáním je vůči výsledné hodnotě velmi malá, protože sa jedná o multiplikativní konstantu a ne o rozdíl blízkých čísel jako výše) dostáváme

$$\Delta m \approx m\frac{6Mr^4}{M_\mathrm{Z}R^4} = 0{,}39\,\mathrm{mg}\,,$$

což je výrazně méně než v předchozím případě. Stojí za pozornost, že takové síly způsobují mimo jiné i příliv a odliv.

Matěj Mezera
`m.mezera@fykos.cz`

Jozef Lipták
`liptak.j@fykos.cz`

Fyzikální korespondenční seminář je organizován studenty MFF UK. Je zastřešen Oddělením propagace a mediální komunikace MFF UK a podporován Ústavem teoretické fyziky MFF UK, jeho zaměstnanci a Jednotou českých matematiků a fyziků.