Úloha I.S ... rozjezd

10 bodů; průměr 5,72; řešilo 47 studentů

Předtím, než se začneme věnovat umění analytické mechaniky, je vhodné si zopakovat klasickou mechaniku na následující sérii příkladů.

a) *Na vrcholu křišťálové koule dřepí homogenní kulička s velmi malým poloměrem. Kuličce udělíme libovolně malou rychlost a ta tak začne padat po povrchu koule. Kde se kulička odpojí od křišťálové koule? Uvažujte, že kulička neprokluzuje.*

b) *Místo koule z předchozí úlohy máme křišťálový paraboloid, daný rovnicí $y = c - ax^2$. Opět nás zajímá, kde se kulička od paraboloidu odpojí.*

c) *Cyklista odbočuje rychlostí v na cestu kolmou k té, po které právě jede. Zatáčku projede po části kružnice s poloměrem r. Jak moc se musí cyklista do zatáčky naklonit? Moment setrvačnosti kol bicyklu můžete zanedbat, cyklistu nahraďte hmotným bodem.*
Bonus *Moment setrvačnosti kol nemůžete zanedbat.*

a) Kulička o hmotnosti m se nejdříve kutálí po povrchu křišťálové koule, potom se odpojí a začne padat volným pádem. Nechť φ je úhel, o který se kulička po kouli odvalila. Zaměřme se na normálové síly, které působí na kuličku hmotnosti m v první části pohybu. Jednak je to normálová složka tíhové síly, kterou spočítáme jako

$$F_{g_\mathrm{n}} = mg\cos\varphi\,,$$

jednak je to reakční síla od velké koule. Dokud se kulička neodlepí, platí, že výslednice těchto sil je rovna dostředivé síle

$$F_\mathrm{d} = \frac{mv^2}{R}\,,$$

kde v je rychlost kuličky a R je poloměr křišťálové koule. Zde jsme zanedbali poloměr kuličky r, v případě přesnějšího výpočtu by ve jmenovateli byl samozřejmě výraz $R + r$. Rychlost kuličky v hloubce h pod původní polohou spočítáme ze zákona zachování energie

$$\frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}J\frac{v^2}{r^2} = mgh\,,$$

kde J je moment setrvačnosti kuličky vůči ose procházející těžištěm. Opět jsme využili faktu, že $r \ll R$, a proto pro úhlovou rychlost kuličky platí $\omega = v/r$. Jelikož je kulička homogenní, můžeme použít vzorec

$$J = \frac{2}{5}mr^2\,.$$

Pro rychlost kuličky tak dostáváme

$$v = \sqrt{\frac{10gh}{7}} = \sqrt{\frac{10gR\left(1-\cos\varphi\right)}{7}}\,,$$

kde jsme si h vyjádřili z geometrie situace jako $h = R\left(1-\cos\varphi\right)$ (v počáteční poloze platí $\varphi = 0$).

Malá kulička se odpojí ve chvíli, kdy bude reakční síla od velké koule nulová, neboli když bude platit $F_{g_n} = F_\mathrm{d}$. Po dosazení ze vztahů výše dostaneme rovnici

$$\cos\varphi = \frac{10}{17}\,.$$

Kulička se tedy od křišťálové koule odpojí v hloubce

$$h = R\left(1 - \cos\varphi\right) = \frac{7}{17}R$$

pod původní polohou. Vidíme, že výsledek nezávisí na poloměru kuličky r.

b) Budeme postupovat obdobně jako v předchozí úloze. Kulička se ale nepohybuje po kružnici, takže nemůžeme dostředivou sílu vyjádřit tak snadno. Můžeme si ale v každém bodě parabolu lokálně nahradit kružnicí. Vezmeme obecnou rovnici kružnice $(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = R^2$ a zkusíme jí napasovat na zadanou rovnici paraboly $y = c - ax^2$. Přitom však budeme chtít, aby se v daném bodě shodovaly nejen hodnoty obou funkcí, ale i jejich první a druhé derivace. Pro kružnici máme (v první rovnici jsme vhodně zvolili znaménko odmocniny)

$$\begin{aligned} y &= y_0 + \sqrt{R^2 - (x - x_0)^2}\,,\\ \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} &= -\left(R^2 - (x - x_0)^2\right)^{-\frac{1}{2}}(x - x_0) = -\frac{x - x_0}{y - y_0}\,,\\ \frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2} &= -\frac{(y - y_0) - (x - x_0)\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}}{(y - y_0)^2} = -\frac{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2}{(y - y_0)^3}\,. \end{aligned}$$

Pro parabolu máme o něco snazší práci a dostáváme

$$\begin{aligned} y &= c - ax^2\,,\\ \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} &= -2ax\,,\\ \frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2} &= -2a\,. \end{aligned}$$

Máme tak soustavu tří rovnic pro tři neznámé R, x_0, y_0, ze kterých vyjádříme

$$R = \frac{\left(1 + 4a^2x^2\right)^{3/2}}{2a} = \frac{\left(1 + 4a\left(c - y\right)\right)^{3/2}}{2a} = \frac{\left(1 + 4ah\right)^{3/2}}{2a}\,,$$

kde jsme zavedli hloubku pod původní polohou $h = c - y$. Pro dostředivou sílu platí

$$F_\mathrm{d} = \frac{mv^2}{R}\,,$$

kde rychlost opět spočítáme ze zákona zachování energie jako

$$v = \sqrt{\frac{10gh}{7}}\,.$$

Dále musíme spočítat normálovou složku tíhové síly. Platí pro ni

$$F_{g_n} = F_g\cos\varphi\,,$$

kde $-\operatorname{tg}\varphi$ je směrnice tečny k parabole. Odtud dostaneme

$$\operatorname{tg}\varphi = 2ax\,.$$

Po pár jednoduchých úpravách dospějeme k rovnici

$$\cos\varphi = \left(1 + \mathrm{tg}^2\,\varphi\right)^{-\frac{1}{2}} = \left(1 + 4a^2x^2\right)^{-\frac{1}{2}} = \left(1 + 4a(c-y)\right)^{-\frac{1}{2}} = \left(1 + 4ah\right)^{-\frac{1}{2}}\ .$$

Danou sílu tedy můžeme vyjádřit jako

$$F_{g_n} = mg\left(1 + 4ah\right)^{-\frac{1}{2}}\ .$$

Z rovnosti $F_d = F_{g_n}$, po dosazení ze vztahů výše, plyne

$$8ah + 7 = 0\,,$$

což nemá pro $a, h \geq 0$ řešení.

To znamená, že se kulička od paraboloidu nikdy neodlepí. K tomuto výsledku jsme mohli dojít i jednodušší úvahou: Pro vodorovný vrh určitou rychlostí se kulička bude pohybovat právě po dané parabole. V našem případě je ale počáteční energie nulová a navíc se část energie „ztrácí“ do valivého pohybu. Proto kulička nikdy během valení nebude mít dostatečnou energii na to, aby se od paraboloidu odlepila. Zadaná úloha tedy už od začátku neměla žádný fyzikální smysl.

c) Popišme situaci z pohledu cyklisty. Působí na něj tři síly – tíhová, odstředivá a reakce podložky. Jejich velikosti jsou

$$F_\mathrm{g} = mg\,,$$

$$F_\mathrm{o} = \frac{mv^2}{r}\,.$$

Tíhová síla působí svisle, odstředivá vodorovně. Cyklista se musí naklonit tak, aby jeho spojnice s místem, ve kterém se kolo dotýká země, byla rovnoběžná s výslednicí prvních dvou sil. Potom bude moment sil, co které na něj působí, nulový. Pro odklon cyklisty od svislého směru tak platí

$$\mathrm{tg}\,\varphi = \frac{F_\mathrm{o}}{F_\mathrm{g}}\,,$$

$$\varphi = \mathrm{arctg}\,\frac{v^2}{gr}\,.$$

Bonus

Nyní je situace o něco složitější (viz. obrázek 1). Kola mají nějaký nenulový moment setrvačnosti, takže při pohybu vykazují moment hybnosti L. Jeho směr je samozřejmě kolmý na rovinu otáčení kol, takže je od země nakloněn o úhel φ. Vektor momentu hybnosti musí rotovat společně s otáčejícím se kolem. Svislá složka je stále stejně velká, zajímá nás tedy vodorovná složka, pro kterou platí

$$L_x = L\cos\varphi\,.$$

Za čas $\mathrm{d}t$ se cyklista pootočí o úhel $\mathrm{d}\alpha = \omega \mathrm{d}t$, kde pro úhlovou rychlost platí

$$\omega = \frac{v}{r}\,.$$

Tomu odpovídá přičtení vektoru změny momentu hybnosti o velikosti

$$|\mathrm{d}\boldsymbol{L}| = L_x \mathrm{d}\alpha = L_x \omega \mathrm{d}t\,.$$

Z toho už můžeme spočítat velikost momentu síly, kterým na bicykl musíme působit, jako

$$|\boldsymbol{M}| = \left|\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{L}}{\mathrm{d}t}\right| = L_x \omega = \frac{Lv}{r}\cos\varphi\,.$$

Nechť se hmotný bod, kterým jsme nahradili cyklistu, nachází ve výšce h nad zemí (když cyklista jede rovně a tudíž není nakloněný). Potom tíhová a odstředivá síla vytváří moment (vzhledem k bodu dotyku kola a podložky ve směru jízdy)

$$M = M_\mathrm{g} + M_\mathrm{o} = F_\mathrm{g} h \sin\varphi - F_\mathrm{o} h \cos\varphi = mgh\sin\varphi - \frac{mv^2h}{r}\cos\varphi\,.$$

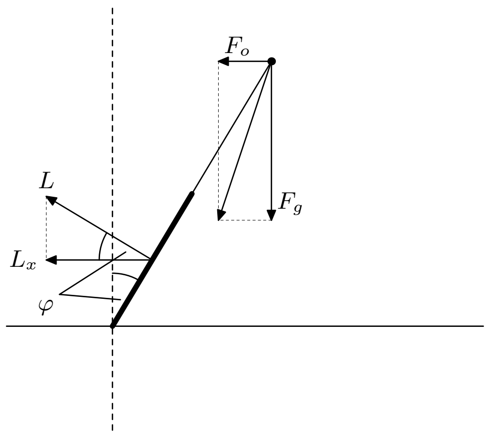
Proti těmto silám samozřejmě působí reakce podložky, která má stejnou velikost a opačný směr. Tato síla však působí v bodě dotyku kola a silnice, vůči kterému moment počítáme. Moment síly, kterým na kolo působí, tak bude nulový. Výslednice všech sil, působících na kolo, je tak stejně jako v předchozím případě nulová, ale výsledný moment nulový není. Máme tak rovnici

$$\frac{Lv}{r}\cos\varphi = mgh\sin\varphi - \frac{mv^2h}{r}\cos\varphi\,,$$

ze které si už snadno vyjádříme hledaný úhel náklonu cyklisty v zatáčce

$$\varphi = \mathrm{arctg}\left(\frac{v^2}{gr} + \frac{Lv}{mghr}\right)\,.$$

Vidíme, že dosazením $L = 0$ dostaneme stejný výsledek jako v základní části úlohy.



Obr. 1: Nákres situace z pohledu cyklisty.

Jáchym Bártík
tuaki@fykos.cz