

Úloha I.E ... hodinová

12 bodů; (chybí statistiky)

Změřte délku jednoho dne. Jedno souvislé měření však nemůže trvat déle než jednu hodinu (pro statistickou přesnost však měření opakujte). *Jáchym měl hodinu do deadlinu.*

Úvod

Rozvoj fyziky i vedy ako takej bol spojený s každodenným životom našich predkov. Práve potreba poznania striedania sa dňa a noci, ročných období či ročného cyklu prinútili ľudí merať čas a zostaviť kalendár. Vďaka jeho jednoduchému určeniu sa stal základnou časovou jednotkou deň. Nový deň sa začínal s východom, alebo západom Slnka. Pohyb Slnka po oblohe sme použili na určenie dĺžky dňa aj my. Merali sme v podstate uhlovú rýchlosť Slnka na oblohe, z čoho sme následne určili, koľko trvá jeho jeden celý obeh (resp. jedno otočenie Zeme okolo osi).

Postup merania

Základom experimentu bolo meranie uhlu, o ktorý sa posunul (tj. otočil) tieň špajdle za daný čas. K meraniu sme použili papier ako podložku, na ktorú sme značili polohu tieňa, a vhodne dlhú špajdlu, ktorú sme zabodli do zeme, aby sa jej poloha (tj. vrchol uhla) nemenila a zároveň bola kolmá k podložke. Podložku sme umiestnili vodorovne. Použitá špajdla mala po zapichnutí do zeme výšku $l = (25,80 \pm 0,05)$ cm (medzná chyba merania je daná použitým pravítkom ako polovica najmenšieho dieliku) od miesta prieniku s papierovou podložkou (päty).

Samotné meranie prebiehalo tak, že sme na papierovú podložku zakresľovali polohu tieňa špajdle a ku každému meraniu sme si poznačili presný čas. Z toho sme potom určili, o aký uhol sa tieň posunul za daný časový úsek.

Namerané dáta

Je viacero spôsobov, ako môžeme k zberu dát pristúpiť. Jedna možnosť je zmerať, o aký uhol sa posunie tieň špajdle za 1 hodinu. Pre získanie presného výsledku však budeme musieť meranie opakovať. Vďaka štatistickému spracovaniu potom dostaneme dostatočne presnú hodnotu výsledku. Druhou variantou je spraviť niekoľko meraní polohy tieňa v krátkych intervaloch počas jednej hodiny.

My sme zvolili druhú možnosť. Od 14:50 do 16:15 sme spravili 13 meraní v časových intervaloch 5 až 9 minút (viď. tabuľka 1). Z tohto súboru dát sme vybrali ten hodinový úsek, ktorého dáta boli najlepšie namerané (tj. neovplyvnené napríklad silným vetrom). Išlo konkrétne o dáta namerané v čase od 15:09 do 16:09 (viď tabuľka 2).

Spracovanie merania

Uhol posunu tieňa sme pre väčšiu presnosť merali trigonometricky. Na zakreslených tieňoch špajdle ako priamkách sme vyznačili body, ktoré sa od päty špajdle (tj. vrcholu uhla) nachádzali v rovnakej vzdialenosti, v našom prípade to bolo $a = (45,2 \pm 0,2)$ cm (medzná chyba je väčšia kvôli použitiu nepresnejšieho pravítka a motúziku). Uhol α , o ktorý sa tieň posunul, sme tak určili ako

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{x}{a}, \quad (1)$$

kde x je vzdialenosť vyznačených bodov na úsečkách dvoch susediacich polôh tieňa špajdle. Nakoľko posunutie bolo vždy menšie ako 3° , mohli sme použiť aproximáciu $\alpha \approx \operatorname{tg} \alpha$. Chybu

určenia uhlu α sme odhladli na 10 %. Táto chyba je výrazne väčšia ako štatistická chyba merania a k jej hodnote sme dospeli uvážením nepresnosti pri zakresľovaní polohy tieňa (papier bol na zemi mierne nerovný, pri zakresľovaní fúkal vietor, ktorý mierne kýval špajdlou i podložkou).

Vybraný súbor dát (tabuľka 2) sme spracovali do grafu 1, ktorý zobrazuje, ako s veľkosťou časového intervalu narastá odklon tieňa špajdle od počiatočnej polohy. Tento nárast má jasnú lineárnu tendenciu. Graf sme preto nafitovali lineárnou funkciou

$$\alpha = At + B, \quad (2)$$

pričom nás zaujíma predovšetkým parameter A . Ten hovorí o závislosti pootočenia tieňa na čase. Parameter B má predovšetkým korekčný charakter. Fitovaním sme určili ich hodnoty ako

$$A = (0,2310 \pm 0,0017) \text{ }^\circ \cdot \text{min}^{-1},$$

$$B = (0,126 \pm 0,045) \text{ }^\circ.$$

Z hodnoty parametru A je zrejmé, že tieň Slnka sa na papieri posunie o $0,231^\circ$ za minútu. Z toho jednoducho určíme, že otočenie o celých 360° , tj. jeden (synodický) deň bude trvať $\frac{360}{0,231} \text{ }^\circ \cdot \text{min}^{-1} = 1558,44$ minút, čo je 25,97 hodín.

Táto hodnota však ešte nie je konečná. Uhol α , ktorý sme merali, totiž vyjadruje otočenie okolo päty špajdle, a nie jej vrcholu. Preto musíme hodnotu α prepočítať vzhľadom na otočenie okolo vrcholu špajdle. Pre zjednodušenie sme uvažovali, že výška Slnka nad obzorom je nemenná.

Vrchol špajdle sme si označili V a jej päťu P . Vrchol špajdle V sa premietol na papier ako koniec tieňa, označili sme ho A , reps. B na začiatku a konci časového intervalu jedného merania. V takomto značení sme teda chceli prepočítať uhol $\alpha = |\angle APB|$ na uhol $\delta = |\angle AVB|$.

V prípade konštantnej výšky Slnka nad obzorom je úsečka $|AB|$ kolmá na rovinu APV . Potom z trigonometrie platí $\alpha = |AB|/|AP|$ a $\delta = |AB|/|AV|$ (nakoľko ide o malé uhly, aproximovali sme $\text{tg } \alpha \approx \alpha$, resp. $\text{tg } \delta \approx \delta$). Uhol δ sme vyjadrili pomocou uhlu α ako

$$\delta = \alpha \frac{|AP|}{|AV|}. \quad (3)$$

Do vzťahu (3) tak už len dosadíme namerané hodnoty. Vzdialenosť $|AP| = (57,4 \pm 0,3)$ cm (vyjadruje dĺžku tieňa špajdle) sme priamo namerali. Vzdialenosť $|AV| = (62,9 \pm 0,4)$ cm sme vypočítali pomocou Pytagorovej vety z dĺžky špajdle l a z dĺžky jej tieňa. Z toho pokiaľ za uhol α dosadíme uhlový posun Slnka za jednu minútu (tj. hodnotu parametru A z rovnice (2), dostaneme uhol $\delta = (0,2108 \pm 0,0021)^\circ$ vyjadrujúci hodnotu uhlového posunu Slnka korigovanú k vrcholu špajdle. Nami nameraná výsledná hodnota dĺžky dňa tak vychádza $(28,5 \pm 2,8)$ hodín.

Diskusia

Je zrejmé, že výsledná hodnota sa výrazne líši od reálneho synodického dňa (tj. 24 hodín). Túto diskrepanciu pravdepodobne spôsobuje hrubá systematická chyba. Ako hneď prvú musíme zohľadniť chybu, ktorú spôsobila úvaha, že Slnko sa pohybuje počas celého merania v rovnakej výške nad obzorom.

Ďalšiu veľkú nepresnosť spôsobila nestabilne umiestnená podložka. Vzhľadom na to, že podložka tvorená tvrdým výkresom bola položená na trávinatej ploche, nerovnosti spôsobovali problém pri správnom zakreslení tieňa špajdle. Problémy tiež spôsoboval vietor, ktorý jednak rozkýval špajdlu a mohol mierne zmeniť jej smer vzhľadom na podložku, zároveň tiež rozvlnil

Tab. 1: Namerané hodnoty otočenia tieňa špajdle α za zvolené časové intervaly t .

Meranie	$\frac{t}{\text{min}}$	$\frac{\alpha}{^\circ}$
1	7	1,774
2	5	1,141
3	7	1,774
4	5	1,267
5	9	2,027
6	8	2,027
7	7	1,521
8	7	1,647
9	5	1,267
10	7	1,394
11	6	1,394
12	6	1,267
13	6	1,141

Tab. 2: Otočenie tieňa špajdle α od počiatočnej polohy v priebehu 1 hodiny.

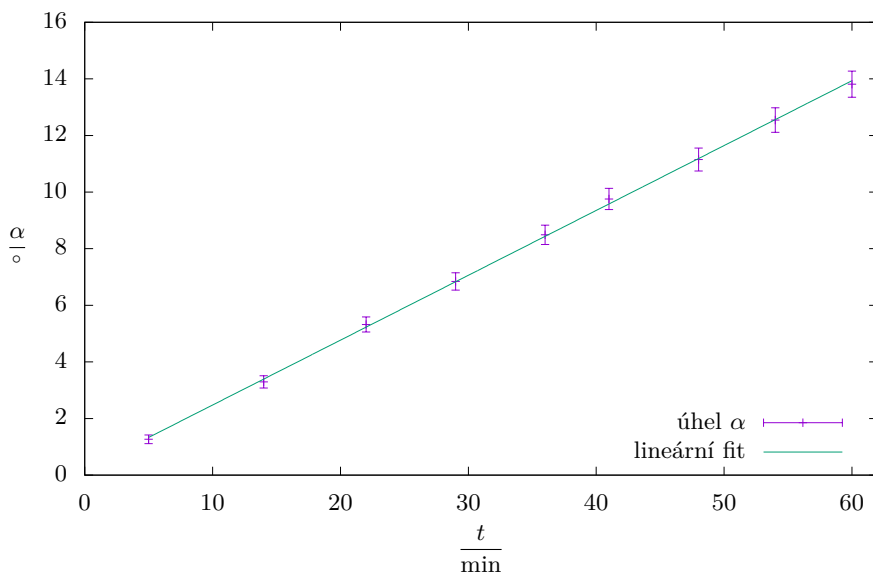
Meranie	$\frac{t}{\text{min}}$	$\frac{\alpha}{^\circ}$
1	5	1,27
2	14	3,29
3	22	5,32
4	29	6,84
5	36	8,49
6	41	9,76
7	48	11,15
8	54	12,55
9	60	13,81

upevnenú podložku, čím opäť spôsoboval nepresnosti v zakreslení tieňa. Chybu do výsledku určite zanesla aj nie presne kolmá poloha špajdle.

Navyše, tieň špajdle bol hrubý, čo spôsobilo ďalšiu nepresnosť so zakreslením. Snažili sme sa značiť stred tieňa, čo sa nám však nie vždy mohlo rovnako podariť. Čas sme merali na celé minúty, pretože zakresľovanie trvalo niekoľko sekúnd (predovšetkým kvôli nedostatočne pevnej zemi pod podložkou), no meranie sme vždy vykonávali okolo celej minúty, teda chyba v meraní času sa nekumulovala.

Presnosť nášho výpočtu by sme mohli zvýšiť, keby sme pre každé meranie zaznamenali dĺžku tieňa špajdle, z čoho by bolo možné určiť výšku Slnka nad obzorom pre každé meranie. Išlo by však len o približné určenie, tieň konca špajdle bol totiž zle ohraničený. Pretože sme však použili relatívne dlhú špajdlu, ani pri použití dvoch výkresov sme sa nevyhli tomu, že koniec tieňa sa premietol mimo podložku určenú na jeho zakreslenie.

Presnosť nášho merania by sme mohli zvýšiť väčším súborom dát. Aby sme však neprekročili



Obr. 1: Závislosť otočenia tieňa špajdle na dĺžke časového intervalu.

podmienku merania maximálne jednej hodiny, možnosti by boli dve. Jednou možnosťou je spraviť meranie, ktoré sme popísali vyššie, niekoľko krát po sebe a jeho výsledky štatisticky spracovať. Druhou možnosťou je nesčítat jednotlivé niekoľko minútové úseky merania spolu, ale spriemerovať veľký súbor meraní o dĺžke niekoľko minút. Teoreticky, pri veľkej snahe, môžeme úseky merať aj celú hodinu a potom priemerovať tieto merania. V oboch prípadoch by sme sa nedopustili porušenia podmienky, pokiaľ nepoužijeme časový interval dlhší ako 1 hodina, prípadne nebudeme jednotlivé intervaly sčítavať do intervalu väčšieho ako 1 hodina.

Alternatívne spôsoby určenia dĺžky dňa

Pri určovaní dĺžky dňa sme mohli taktiež použiť tieň nejakej budovy alebo väčšieho objektu. Meranie by však mohlo byť viac nepresné. Taktiež sme mohli zvoliť iné geometrické usporiadanie objektu, ktorý vrhá tieň, a tienidla. Bežne sa pri slnečných hodinách používa vodorovná podložka a oska sklonená v smere zemskej osi. Na výpočty najjednoduchšie je tieň osky rovnoobežnej so zemskou osou premietat na súosú valcovú plochu, v tomto prípade netreba prevádzkať žiadne korekcie a tieň by sa po povrchu valca mal pohybovať rovnomerne rýchlosťou $15^\circ \cdot \text{h}^{-1}$.

Ďalšou metódou je sledovanie pohybu hviezd. Princíp je podobný ako v nami zvolenom postupe so sledovaním Slnka. V tomto prípade by sme však merali priamo posun hviezd na oblohe. Spôsobov na to je viacero, napríklad merať čas medzi hornými kulmináciami dvoch hviezd o známych rektascenziách. Tu sa ale ako problém ukazuje nezávisle zmerať uhlové vzdialenosti na oblohe, dajú sa však nájsť vo hviezdnych mapách.

Na záver spomenieme metódu využívajúcu Foucaultovo kyvadlo. Jeho konštrukcia však nie je úplne jednoduchá a ľahko sa môžeme dopustiť veľkej chyby merania. Foucaultovo kyvadlo

poukazuje na rotáciu Zeme, ktorej dôsledkom je Coriolisova sila. Tá bude zdanlivo stáčať rovinu kmitov kyvadla, čo môžeme namerať. Veľkosť tohto stáčania však závisí na zemepisnej šírke, na rovníku sa rovina kmitov vôbec nestáča. V našich zemepisných šírkach je posun dostatočne veľký už pri hodinovom meraní. Meranie by sme však i tak museli opakovať pre získanie dostatočne veľkého štatistického súboru dát a pre presné určenie chyby nášho merania.

Poznámka na záver

Autor tohto riešenia je presvedčený o tom, že keby mal deň naozaj 28 hodín, konečne by stíhal aspoň polovicu zo svojich plánov.

Daniel Dupkala
daniel.dupkala@fykos.cz

Fyzikální korespondenční seminář je organizován studenty MFF UK. Je zastřešen Oddělením propagace a mediální komunikace MFF UK a podporován Ústavem teoretické fyziky MFF UK, jeho zaměstnanci a Jednotou českých matematiků a fyziků.

Toto dílo je šířeno pod licencí Creative Commons Attribution-Share Alike 3.0 Unported.
Pro zobrazení kopie této licence navštivte <http://creativecommons.org/licenses/by-sa/3.0/>.