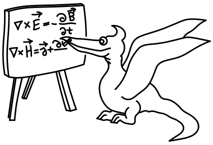

Seriál: Lagrangeovy rovnice II. druhu

Úvod

V tejto časti začneme s novou témou, ktorá nás bude sprevádzať až do konca seriálu. Po troch dieloch seriálu sa na konci tohto dostaneme k Lagrangeovym rovniciam 2. druhu. Tieto rovnice predstavujú novú, pokročilejšiu formuláciu mechaniky, kde na popis fyzikálneho problému budeme potrebovať iba jednu jedinú skalárnu funkciu, z ktorej sa následne naučíme jednoducho určiť pohybové rovnice.

Zovšeobecnené súradnice

Pri riešení nejakého fyzikálneho problému musíme na úvod vždy, aj ke spravidla to robíme mimovoľne, učiniť rozhodnutie, v akých súradniciach budeme danú úlohu riešiť. V prípade pokročilejšej stredoškolskej úrovne fyziky je to obvykle tak, že volíme za tieto súradnice súradnice kartézske. Dokonca častokrát prirodzenú trojrozmernú trojicu súradníc x, y, z zredukujeme len na dvojicu x, y a problém riešime v jednej rovine. Mnohokrát je ale aj v tomto prípade úloha riešiteľná veľmi obtiažne.

Pri konštrukcii Lagrangeovych rovníc je problém obtiažnosti systému eliminovaný do maximálnej možnej podoby hneď od začiatku, a to použitím zovšeobecnených súradníc. Jedná sa o sústavu súradníc, ktoré vystihujú symetriu daného problému tak, že berú ohľad na väzby, ktorým sú objekty podrobené.

Toto sa potom odráža na počte zovšeobecnených súradníc. Napríklad poloha planéty pohybujúcej sa okolo Slnka môže byť popísaná tromi kartézskymi súradnicami. Alebo, nakoľko na planétu pôsobia 2 väzby[1] môže byť jej poloha popísaná jedinou súradnicou, a to napríklad uhlom (od 0° do 360°), ktorý zviera spojnica Slnka a planéty s hlavnou poloosou jej dráhy.

Podobne napríklad činku z úlohy k predchádzajúcemu dielu seriálu, ktorá sa pohybuje v 2D priestore, môžme namiesto dvoch kartézskych súradníc pre každý bod popísať dvoma kartézskymi súradnicami ťažiska činky a súradnicou, ktorá zodpovedá uhlu natočenia činky voči osi x.

Nie je tak ťažké z týchto dvoch príkladov odpozorovať, koľko zovšeobecnených súradníc potrebujeme na popis systému. Ak N je počet kartézskych súradníc potrebných na popis všetkých hmotných bodov (obvykle troj- alebo dvojnásobok počtu hmotných bodov, podľa toho či riešime troj- alebo dvojrozmernú úlohu) a v je počet väzieb, tak potom

$$n = N - v$$

je počet zovšeobecnených súradníc potrebných pre popis systému. Tento počet je zároveň aj počet *stupňov voľnosti* telesa, čo je vlastne neprekvapujúce, nakoľko každej možnosti pohybu telesa vieme prisúdiť jednu súradnicu, v ktorej mieru tohto pohybu, ako aj polohu, vieme odmerať.

Pre nás bude ďalej dôležité, že vždy vieme nájsť transformačný vzťah medzi kartézskymi a zovšeobecnenými súradnicami. Pre naše potreby bude dôležité vedieť najmä vyjadriť kaztézske

[1] Planéta sa pohybuje v rovine, a zároveň po elipse. Obe tieto tvrdenia si v rámci seriálu dokážeme.

súradnice pomocou zovšeobecnených. Ako a aj prečo je to dôležité si ukážeme na nasledujúcom príklade.

Príklad: Aká je kinetická energia kyvadla?

Pokúsme sa nájsť vzťah pre kinetickú energiu matematického kyvadla s hmotnosťou m a dĺžkou závesu l. Vieme, že kinetická energia je definovaná ako

$$E_k = \frac{1}{2} m v^2 \,.$$

Čo po rozdelení rýchlosti do dvoch kaztézskych zložiek a s vedomosťou, že zložka rýchlosti v nejakom smere je (v kartézskych súradniciach) časová derivácia danej súradnice vieme napísať ako

$$E_k = \frac{1}{2} m \left(\dot{x}^2 + \dot{y}^2\right) \,.$$

Dalo by sa argumentovať, že úloha je splnená, čo je samozrejme čiastočne pravda, avšak z nášho vzťahu nie je vidieť, že sa jedná o kyvadlo, nakoľko tento vzťah platí pre každý hmotný bod v 2D priestore. Na to, aby šlo o kinetickú energiu kyvadla, by sme museli ešte pridať väzbu v tvare $x^2 + y^2 = l^2$ a nejako ju do vzťahu pre E_k zakomponovať. Preto zavedieme zovšeobecnenú súradnicu φ, ktorá bude vyjadrovať uhol náklonu kyvadla od osi y meraný proti smeru hodinových ručičiek. Považujme bod závesu kyvadla za počiatok kartézskej sústavy súradníc. Ak je dĺžka závesu l, potom je prevod medzi kartézskymi súradnicami závažia na kyvadle x, y a našou zovšeobecnenou súradnicou φ

$$y = l \cos\varphi \,,$$
$$x = l \sin\varphi \,.$$

Z týchto vzťahov vieme derivovaním podľa času získať vzťahy pre jednotlivé kartézske zložky rýchlosti hmotného bodu vyjadrené pomocou zovšeobecnenej súradnice.

$$\dot{y} = -l \sin(\varphi)\dot{\varphi} \,,$$
$$\dot{x} = l \cos(\varphi)\dot{\varphi} \,.$$

Po dosadení do rovnice pre kinetickú energiu dostávame

$$E_k = \frac{1}{2} m \left((l \sin(\varphi)\dot{\varphi})^2 + (l \cos(\varphi)\dot{\varphi})^2 \right) \,.$$

Keďže vieme, že súčet kvadrátu sínusu a kosínusu rovnakého argumentu je rovný jednej, dostávame

$$E_k = \frac{1}{2} m l^2 \dot{\varphi}^2 \,.$$

Keďže $\dot{\varphi}$ je vlastne uhlová rýchlosť, vidíme, že to čo sme dostali, je vlastne úplne očakávateľné, nakoľko ak do tohto vzťahu dosadíme

$$\dot{\varphi} = \frac{v}{l} \,,$$

dostaneme pôvodný vzťah.

Vidíme teda, že zavedenie zovšeobecnených súradníc má svoju výhodu už aj na prvý pohľad, a to v tom, že dôležité fyzikálne vzťahy vyzerajú jednoduchšie a prirodzenejšie. Poďme si teraz pomocou nich ukázať, ako sa dajú zaviesť Lagrangeove pohybové rovnice.

Lagrangeove rovnice II. druhu

Lagrangeove rovnice si odvodíme v jednorozmernom priestore a pre jeden hmotný bod. Tento postup sme zvolili, aj keď je možno mierne neštandardný, preto, že je jednoduchší na uchopenie, a pritom je úplne rovnaký, ako kedy sme to robili pre n hmotných bodov a v 3D priestore. Celý postup postupne rozložíme do niekoľkých krokov a posnažíme sa ich popísať čo najviac zrozumiteľne. Tak si držme palce.

Diferenciál polohy a kinetická energia

Majme v 1D priestore popisovanom súradnicou x zovšeobecnenú súradnicu q. Vo všeobecnosti je potom x nejakou funkciou našej súradnice q a času t, píšeme $x(q,t)$. Ak predpokladáme, že $x(q,t)$ je funkciou udávajúcou polohu nejakej konkrétnej častice, je pre nás veľmi cenná informácia vedieť určiť kinetickú energiu tejto častice, ktorej hmotnosť si môžme pre naše potreby označiť m. Nato potrebujeme určiť rýchlosť danej častice, teda úplnú časovú deriváciou funkcie $x(q(t),t)$. To znamená derivovať najprv podľa jednej a potom podľa druhej premennej, pričom ak je jedna z premenných funkciou času, samozrejme musíme derivovať aj tú ako zloženú funkciu. V našom prípade to vyzerá nasledovne

$$\frac{\mathrm{d}x(q,t)}{\mathrm{d}t} = \frac{\partial x}{\partial q}\frac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}t} + \frac{\partial x}{\partial t}\,.$$

Prečo je pri derivácii q znak obyčajnej, a nie parciálnej derivácie? V tomto prípade sa jedná skutočne o úplnú časovú deriváciu tejto súradnice. Pravdou je ale aj to, že súradnica q nemá, tak ako sme si ju zadefinovali, žiadne iné závislosti ako časovú (čo vyplýva priamo z toho že je to súradnica pohybujúceho sa bodu), a teda pre tento konkrétny prípad platí

$$\frac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}t} = \frac{\partial q}{\partial t} = \dot{q}\,.$$

Napriek tomu je ale formálne správnejšie písať to ako ozajstnú, a nie parciálnu deriváciu.

Teraz môžme napísať vzťah pre kinetickú energiu nášho hmotného bodu. Zvolím značenie, na ktoré nie ste pravdepodobne zvyknutí, no budeme sa ho odteraz držať, nakoľko sa v analytickej mechanike používa vždy. Kinetickú energiu budeme značiť od tohto okamihu T. Potom platí

$$T(t) = \frac{1}{2}m\left(\frac{\partial x}{\partial q}\frac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}t} + \frac{\partial x}{\partial t}\right)^2 = \frac{1}{2}m\left(\frac{\partial x}{\partial q}\dot{q} + \frac{\partial x}{\partial t}\right)^2\,.$$

Zastavenie času

Teraz náš hmotný bod v čase stojí. Inými slovami, pozeráme sa naň v jednom konkrétnom čase, v ktorom skúmame jeho vlastnosti. Jeho poloha a rýchlosť sú teda v konkrétnom časovom okamihu na sebe nezávislé. Keď budeme skúmať, ako by vyzerala energia tohto bodu v prípade, že trochu zmeníme jeho polohu alebo rýchlosť budeme predpokladať, že pri malej zmene polohy sa nezmení jeho rýchlosť a obrátene. V matematickej reči, keď budeme derivovať podľa polohy alebo rýchlosti, tak bude platiť

$$\frac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}\dot{q}} = \frac{\mathrm{d}\dot{q}}{\mathrm{d}q} = 0\,.$$

čo je vlastne len matematický zápis toho čo sme povedali, teda že rýchlosť a poloha sú v konkrétnom časovom okamihu vnímané ako na sebe nezávislé.

To nám dovolí spočítať parciálne derivácie kinetickej energie podľa polohy a podľa rýchlosti. Znova vám odporúčam, aby ste si to skúsili sami a výsledok si iba skontrolovali. Pamätajte pri tom ale na to, že parciálne derivácie x podľa času aj podľa zovšeobecnenej súradnice q sú stále funkcie aj zovšeobecnenej súradnice q. Výsledok by vám mal vyjsť nasledovne:

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{q}} = m\left(\frac{\partial x}{\partial q}\dot{q} + \frac{\partial x}{\partial t}\right)\frac{\partial x}{\partial q}\,,$$
$$\frac{\partial T}{\partial q} = m\left(\frac{\partial x}{\partial q}\dot{q} + \frac{\partial x}{\partial t}\right)\frac{\partial}{\partial q}\left(\frac{\partial x}{\partial q}\dot{q} + \frac{\partial x}{\partial t}\right)\,.$$

Rozmrazenie času

Teraz všetky rovnice, ktorými disponujeme, môžme znova chápať ako časovo závislé. Dovolím si pre prehľadnosť ešte jednu úpravu, namiesto

$$\frac{\partial x}{\partial q}\frac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}t} + \frac{\partial x}{\partial t}$$

budeme písať kratšiu verziu

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}\,.$$

Aplikujme na rovnicu pre $\frac{\partial T}{\partial \dot{q}}$ operáciu úplnej derivácie podľa času. Druhú rovnicu necháme nepozmenenú, čím dostaneme

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial T}{\partial \dot{q}} = m\left(\frac{\mathrm{d}^2 x}{\mathrm{d}t^2}\frac{\partial x}{\partial q} + \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial x}{\partial q}\right)\,,$$
$$\frac{\partial T}{\partial q} = m\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}\frac{\partial \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}}{\partial q}\,.$$

Teraz spravíme trik – od prvej rovnice odčítame druhú. Vo všetkých prípadoch, ktoré sú pre fyziku užitočné, môžme ďalej predpokladať, že platí

$$\frac{\partial}{\partial y}\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\frac{\partial f}{\partial y}\,.$$

Táto vlastnosť sa nazýva *zámennosť derivácií*. Až na malé výnimky je operácia derivácie sama zo sebou komutatívna.

Po už spomínanom odčítaní za použitia komutativity derivácií dostaneme

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial T}{\partial \dot{q}} - \frac{\partial T}{\partial q} = m\left(\frac{\mathrm{d}^2 x}{\mathrm{d}t^2}\frac{\partial x}{\partial q}\right)\,.$$

Táto rovnica by sa už dala považovať za formuláciu Lagrangeovych rovníc, avšak najmä jej pravá strana nie je veľmi dobre zrozumitelná. Poďme sa teda pozrieť, aký význam má pravá strana tejto rovnice. Už na prvý pohľad je zrejmé že časť

$$m\frac{\mathrm{d}^2 x}{\mathrm{d}t^2} = F(x,t)$$

je nejaká vonkajšia sila pôsobiaca na náš hmotný bod. K tomu, aký význam má časť $\frac{\partial x}{\partial q}$, si pripomenieme niečo z druhej série seriálu, a síce, aký tvar má gradient. V tomto prípade totižto, keďže sme len v jednorozmernom priestore, je gradient k danej krivke $x(t)$ iba číslo – jedna derivácia $\frac{\partial x}{\partial q}$. Celá pravá strana má potom význam zovšeobecnenej sily (prenásobenej konštantou závislou len na voľbe zovšebecnených súradníc), ktorú si môžme označiť Q. Dostávame

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial T}{\partial \dot{q}} - \frac{\partial T}{\partial q} = Q\,.$$

To ale ešte nie je podoba Lagrangeovych rovníc tak, ako ju poznáme. Vieme ale, že so silami sa vo všeobecnosti spája skalárna veličina nazývaná potenciál. Ak máme konzervatívne pole[2], v ktorom pôsobí na teleso sila $\boldsymbol{F}$, potom je potenciál V tohto poľa implicitne definovaný ako

$$F_i = -\nabla V_i = -\frac{\partial V}{\partial x_i}\,.$$

Pre náš prípad bude mať sila len jednu zložku

$$F(x) = -\frac{\mathrm{d}V(x)}{\mathrm{d}x}$$

a použitím pravidla pre derivovanie zloženej funkcie máme

$$Q(q,t) = -\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}x}\frac{\partial x}{\partial q} = -\frac{\partial V(q,t)}{\partial q}\,.$$

Dosadením tejto rovnice do Lagrangeovych rovníc za predpokladu, že riešime pohyb v konzervatívnom poli, a následným presunutím všetkých členov na jednu stranu dostávame

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial T}{\partial \dot{q}} - \frac{\partial T}{\partial q} + \frac{\partial V}{\partial q} = 0\,.$$

Keďže potenciál V nie je závislý na rýchlosti telesa,[3] platí

$$\frac{\partial V}{\partial \dot{q}} = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial V}{\partial \dot{q}} = 0\,.$$

Teraz môžme tento nulový výraz pripočítať k Lagrangeovej rovnici a po úprave dostaneme

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial\left(T-V\right)}{\partial \dot{q}} - \frac{\partial\left(T-V\right)}{\partial q} = 0\,,$$

kde funkcia $T-V$ predstavuje rozdiel kinetickej a potenciálnej energie. Nazývame ju *Lagrangián* a značíme L. Rovnicu teda môžme zapísať aj takto

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}} - \frac{\partial L}{\partial q} = 0\,.$$

[2] Pole, v ktorom objekt nestráca mechanickú energiu, teda keď sa objekt v tomto poli bude pohybovať je celková zmena jeho kinetickej energie nezávislá na trajektórii pohybu, ale len na počiatočnom a koncovom bode. Ak sa takýto objekt v konzervatívnom poli pohybuje po uzavretej krivke, nestráca ani nezískava žiadnu energiu. Príkladom takéhoto poľa je napríklad pole gravitačné.

[3] Ak by bol, môže existovať tzv. zovšeobecnený potenciál, pre ktorý stále platia Lagrangeove rovnice v nasledujúcom tvare. Napríklad pri elektromagnetickej sile to platí len pri istej špeciálnej voľbe potenciálu, nazvanej Lorentzova kalibračná podmienka.

Čo by sa ale stalo vo viacerých rozmeroch? Pri pohľade na rovnicu vidíme, že jediné čo nejako závisí na počte rozmerov je súradnica q. Preto rozšírenie tejto rovnice na viacrozmerný prípad je veľmi triviálne, a síce len také, že pre viacero súradníc dostaneme viacero rovníc tak, že vždy budeme týmto spôsobom derivovať Lagrangián podľa príslušnej súradnice a rýchlosti. Preto počet rovníc zodpovedá počtu zovšeobecnených súradníc.[4] Tím dostaneme najznámejší tvar Lagrangeovych rovníc, s ktorým sa v tomto seriáli budeme stretávať ešte veľmi dlho

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial L}{\partial q_i} = 0\,.$$

Celá táto kapitola bola venovaná odvodeniu Lagrangeovych rovníc. Berte ju skôr informatívne, rozhodne od vás nikto nebude vyžadovať, aby ste toto odvodenie ovládali.[5] Dôvod prečo som to tu ukazoval je, aby ste mali predstavu, že k veľkým fyzikálnym zákonom sa dá prísť hraním sa s deriváciami rôznych vecí a sčítavaním a odčítavaním zdanlivo nesúvisiacich vecí od seba, až nakoniec vznikne niečo tak zásadné ako Lagrangeove rovnice. Z vášho pohľadu sme ale ešte len na začiatku. Práve ste dočítali odvodenie niečoho, čoho využiteľnosť pravdepodobne vôbec nevidíte. Že je to na niečo vôbec dobré mi zatiaľ musíte veriť. V seriáli sa ďalej postupne prepracujeme cez zostavenie a riešenie Lagrangeovych rovníc pre rôzne prípady. V dnešnej sérii si ešte ukážeme prvý krok k riešeniu fyzikálneho problému.

Nájdenie Lagrangeovej funkcie

Priamo z definície Lagrangeovej funkcie vyplýva, ako ju treba hľadať. Musíme nájsť vzťah pre kinetickú a potenciálnu energiu systému. Keďže celý problém chceme riešiť v zovšeobecnených súradniciach, je azda najkľúčovejším krokom nájsť vhodné zovšeobecnené súradnice. To znamená popísať ich a nájsť vzťah medzi nimi a kartézskymi súradnicami. Potom deriváciou tohto vzťahu určíme, ako vyzerajú jednotlivé zložky rýchlostí, teda funkcií $\dot{q}(q,t)$. Tieto vzťahy dosadíme do vzťahov pre potenciálnu a kinetickú energiu, aby sme dostali Lagrangián, z ktorého už nie je problém určiť pohybové rovnice. Poďme sa na toto pozrieť krok po kroku a simultánne s tým hľadať Lagrangián pre matematické kyvadlo.

1. *Zavedenie zovšeobecnených súradníc*
   V našom prípade, ako sme už spomínali skôr, bude zovšeobecnenou súradnicou uhol vychýlenia φ. To, že nám stačí jedna súradnica, je vidieť z toho, že kyvadlo riešime ako dvojrozmerný problém, pričom je v ňom jedna väzba – hmotný bod musí byť vždy v rovnakej vzdialenosti l od bodu závesu.

2. *Vyjadrenie kartézskych súradníc pomocou zovšeobecnených*
   Ako sme uviedli skôr, vzťah medzi zovšeobecnenou súradnicou a kartézskymi súradnicami x, y je

$$y = l\cos\varphi\,,$$
$$x = l\sin\varphi\,.$$

[4] Dôležitou poznámkou je, aj keď je to možno zjavné, že zovšeobecnené súradnice môžu samozrjeme byť súradnice *viacerých* hmotných bodov, ktorých pohyb vyšetrujeme.

[5] Samozrejme len pokiaľ nepôjdete študovať všeobecnú fyziku.

3. *Spočítanie kartézskych rýchlostí*
   V našom prípade musíme len usilovne derivovať, čo dopadne presne tak ako na začiatku seriálu

$$\dot{y} = -l\sin(\varphi)\dot{\varphi}\,,$$
$$\dot{x} = l\cos(\varphi)\dot{\varphi}\,.$$

4. *Dosadením do definície T a V vypočítame kinetickú energiu a potenciál v zovšeobecnených súradniciach*

$$T = \frac{1}{2}m\left((l\sin(\varphi)\dot{\varphi})^2 + (l\cos(\varphi)\dot{\varphi})^2\right) = \frac{1}{2}ml^2\dot{\varphi}^2\,,$$
$$V = -mgy = -mgl\cos(\varphi)\,.$$

5. *Zostavíme Lagrangeovu funkciu*

$$L = \frac{1}{2}ml^2\dot{\varphi}^2 + mgl\cos\left(\varphi\right)\,.$$

6. *Postupným usilovným derivovaním zostavíme Lagrangeove rovnice*
   Toto je časť, ku ktorej sa dostaneme v ďalšom diele seriálu. Zostavenie rovníc totižto súvisí s ich riešením, preto je konzistentnejšie urobiť to spolu v jednom diele seriálu.

Dúfam, že ste si z tohto dielu odniesli niečo nové. Zároveň dúfam, že vás to more vysokoškolskej matematiky neodradilo a pri riešení úloh k seriálu použijete svoj dôvtip, a nájdete tie správne zovšeobecnené súradnice, a následne sa doderivujete úspešne až k správnej Lagrangeovej funkcii.

Fyzikální korespondenční seminář je organizován studenty MFF UK. Je zastřešen Oddělením propagace a mediální komunikace MFF UK a podporován Ústavem teoretické fyziky MFF UK, jeho zaměstnanci a Jednotou českých matematiků a fyziků.