Úloha VI.4 ... rozměrová analýza

7 bodů; (chybí statistiky)

Matěj si doma vyrobil střelnou zbraň a chce změřit, jakou rychlostí vystřeluje náboje. Bohužel nemá k dispozici jiný měřicí přístroj než pravítko. Našel ale kostku, jež je tvořena z poloviny ocelí a poloviny dřevem. Položí ji na kraj stolu (jehož výška je 100 cm *a délka je* 200 cm*) a horizontálně do ní vystřelí. Kulka se od ocelové strany dokonale pružně odrazí přesně opačným směrem a dopadne do vzdálenosti* 50 cm *od stolu. Kostka se na stole posune o* 5 cm*. Potom Matěj kostku otočí a střelí do její dřevěné strany, v níž se kulka zaryje. Nyní naměřil posunutí jen* 4 cm*. Pomozte mu s výpočtem rychlosti výstřelu. Možná se vám bude hodit, že zjistil, že pohyb rozjeté kostky po stole se nezastaví, pokud jednu stranu stolu zvedne do výšky alespoň* 20 cm*.*

Matěj chtěl, aby všechny zadané veličiny měly stejnou jednotku.

Naměřené vzdálenosti si označíme po řadě (tak, jak jsou v zadání) h, l, d, s_1, s_2 a Δh. Hmotnost kulky budeme značit m, hmotnost kostky M a třecí koeficient mezi kostkou a stolem f.

Okamžitou rychlost kostky po odrazu projektilu označme v_1 a rychlost v okamžiku zarytí do dřevěné části označme v_2. Potom její kinetická energie bude $\frac{1}{2}Mv_1^2$ resp. $\frac{1}{2}(M+m)v_2^2$. Pohyb kostky se nezastaví, dokud všechnu energii neztratí vlivem smykového tření. Tíhová síla, která přitlačuje kostku ke stolu, se dá vyjádřit jako Mg resp. $(M+m)g$, proto při posunu o vzdálenost s_1 resp. s_2 ztratí vlivem tření energii $fMgs_1$ resp. $f(M+m)gs_2$. Ze zákona zachování energie dostáváme

$$\frac{1}{2}Mv_1^2 = fMgs_1 \quad \Rightarrow \quad v_1 = \sqrt{2fgs_1}\,,$$

$$\frac{1}{2}(M+m)v_2^2 = f(M+m)gs_2 \quad \Rightarrow \quad v_2 = \sqrt{2fgs_2}\,.$$

Okamžitou rychlost, kterou bude mít kulka hned po odrazu, si označíme u. Potom řešíme horizontální vrh s počáteční rychlostí u. Ze znalosti výšky stolu a vzdálenosti, kam projektil dopadl, dostáváme

$$h = \frac{1}{2}gt^2\,,$$

$$d = ut\,,$$

$$u = \sqrt{\frac{gd^2}{2h}}\,,$$

kde t je čas dopadu, který se nám z rovnic podařilo eliminovat.

Nyní použijeme zákon zachováni hybnosti. Pro oba případy je počáteční hybnost celé soustavy mv. Po odrazu kulky má kostka hybnost Mv_1 a kulka má hybnost $-mu$. Při pohlcení kulky nám zůstává hybnost $(M+m)v_2$. Dostáváme tedy jednu rovnici pro každý případ

$$mv = Mv_1 - mu\,,$$

$$mv = (M+m)v_2\,.$$

Z obou rovnic si vyjádříme poměr hmotností kostky a kulky, které následně eliminujeme

$$\frac{M}{m} = \frac{v+u}{v_1}\,,$$

$$\frac{M}{m} = \frac{v-v_2}{v_2}\,,$$

$$\frac{v+u}{v_1} = \frac{v-v_2}{v_2}\,.$$

Nyní už jen stačí vyjádřit si původní rychlost projektilu. Všechny další rychlosti jsme spočítali výše, takže za ně můžeme rovnou dosadit

$$v = \frac{uv_2 + v_1v_2}{v_1 - v_2} = \frac{\sqrt{\frac{gd^2}{2h}s_2} + \sqrt{2fgs_1s_2}}{\sqrt{s_1} - \sqrt{s_2}}\,.$$

Poslední neznámou je třecí koeficient f. Označme úhel, při kterém se kostka rozjede, jako α. Kostku směrem dolů urychluje složka gravitační síly $mg\sin\alpha$, zatímco jí brzdí třecí síla $fmg\cos\alpha$. Obě síly se musí rovnat, tedy pro třecí koeficient vychází

$$f = \operatorname{tg}\alpha = \frac{\Delta h}{\sqrt{l^2 - \Delta h^2}}\,.$$

Dosazením do předchozího vztahu pro rychlost dostáváme

$$v = \frac{uv_2 + v_1v_2}{v_1 - v_2} = \frac{\sqrt{\frac{gd^2}{2h}s_2} + \sqrt{\frac{2gs_1s_2\Delta h}{\sqrt{l^2-\Delta h^2}}}}{\sqrt{s_1} - \sqrt{s_2}}\,.$$

Matěji, máme problém

V předchozích výpočtech jsme však nikde nevyužili skutečnosti, že odraz má být dokonale pružný. To znamená, že při odrazu by se neměla ztratit žádná energie. Pokud si však zkusíme napsat zákon zachování energie pro odraz kulky

$$\frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}Mv_1^2 + \frac{1}{2}mu^2\,, \tag{1}$$

zjistíme, že jsme dostali další rovnici, ale nedostali jsme žádnou novou neznámou. Všechny veličiny, které v této rovnici vystupují, už známe z předchozích výpočtů.[1] Můžeme si tedy zkusit dosadit jejich skutečné hodnoty ze zadání a ověřit, zda rovnost platí. Oops! Rovnost neplatí. Co to znamená?

Důvod je, že v zadání je příliš mnoho údajů. V podstatě máme více rovnic než neznámých. Docházíme k závěru, že celé zadání je nekonzistentní, protože ve skutečnosti by nebylo možné tuto sadu hodnot naměřit.

To je také důvod, proč můžeme korektními výpočty dojít k několika různým hodnotám v. Stačí ignorovat libovolnou z výše uvedených rovnic a místo ní použít vztah (1) a dostaneme jiný výsledek.

Poznámky k došlým řešením

Ve správném a konzistentním zadání by mělo být o jeden údaj méně. Všichni řešitelé, kteří si nějakým způsobem uvědomili, že hodnoty v zadání nedavají smysl a lze pomocí nich dospět k

[1] Hmotnosti M a m sice neznáme, ale stačí nám znát jejich poměr.

různým výsledkům, dostali bonusový bod.

Matěj Mezera
`m.mezera@fykos.cz`