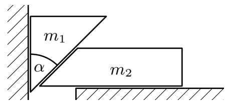
Úloha V.3 ... klín

5 bodů; průměr 2,70; řešilo 30 studentů

Máme dva klíny o hmotnostech m_1, m_2 a úhel α (viz obrázek). Vypočítejte zrychlení levého klínu. Předpokládejte, že nikde nedochází ke tření.



Bonus *Uvažujte tření s koeficientem f.*

Jáchym vykradl skripta ČVUT.

Levý klín se může pohybovat pouze ve svislém směru a pravý klín po podložce ve vodorovném směru. Označme zrychlení levého klínu a_1 a zrychlení pravého klínu a_2. Na levý klín působí ve svislém směru tíhová síla $m_1 g$ a v opačném směru složka $F_n \sin\alpha$ reakční síly F_n, která působí mezi našimi klíny a je kolmá k jejich styčné ploše. Celkově tak z druhého Newtonova zákona dostáváme

$$m_1 g - F_n \sin\alpha = m_1 a_1 \,. \tag{1}$$

Na pravý klín působí ve vodorovném směru složka $F_n \cos\alpha$ reakční síly, a proto platí

$$F_n \cos\alpha = m_2 a_2 \,. \tag{2}$$

Dále využijeme vazbu mezi klíny. Představme si, že se levý klín posune svisle dolů o vzdálenost s_1. Protože na sebe i nadále klíny musí přiléhat, posune se pravý klín doprava o vzdálenost $s_2 = s_1 \operatorname{tg}\alpha$. Dvojitým zderivováním podle času získáme $a_2 = a_1 \operatorname{tg}\alpha$. Když tento vztah dosadíme do rovnice (2), dostaneme

$$F_n \cos\alpha = m_2 a_1 \operatorname{tg}\alpha \,. \tag{3}$$

Nyní máme soustavu dvou rovnic o dvou neznámých. Rovnici (3) vynásobíme výrazem $\operatorname{tg}\alpha$ a sečteme ji s rovnicí (1). Tak se zbavíme členu s neznámou silou $F_n T$,

$$m_1 g = m_1 a_1 + m_2 a_1 \operatorname{tg}^2\alpha \,.$$

Odtud už snadno vyjádříme

$$a_1 = g \frac{1}{1 + \frac{m_2}{m_1} \operatorname{tg}^2\alpha} \,.$$

Jestliže se tedy levý klín bude pohybovat směrem dolů bez tření, jeho výsledné zrychlení bude a_1.

Bonus

Kromě sil zmíněných výše působí na klíny ještě třecí síly s koeficientem tření f. V případě levého klínu se budeme opět zajímat o velikost svislé komponenty výsledné síly. Připomeňme, že na levý klín působí ve svislém směru tíhová síla $m_1 g$ směrem dolů a síla $F_n \sin\alpha$ směrem nahoru. Levý klín působí na pravý klín silou F_n, která je kolmá na jejich styčnou plochu. Tření s pravým klínem způsobí třecí sílu fF_n, která míří ve směru styčné plochy vzhůru a má svislou komponentu $fF_n \cos\alpha$. Celková síla, kterou působí levý klín na svislou stěnu, je součtem síly $F_n \cos\alpha$ a vodorovné komponenty třecí síly $-fF_n \sin\alpha$. Třecí sílu mezi levým klínem a svislou stěnou pak spočítáme jako $f\left(F_n \cos\alpha - fF_n \sin\alpha\right)$. Celkově tak z druhého Newtonova zákona dostáváme

$$m_1 g - F_n \sin\alpha - fF_n \cos\alpha - f\left(F_n \cos\alpha - fF_n \sin\alpha\right) = m_1 a_1 \,.$$

Na pravý klín působí normálová síla F_n a třecí síla fF_n. Jejich vodorovné komponenty jsou $F_n \cos\alpha$ a $-fF_n \sin\alpha$. Dále potřebujeme zjistit velikost výsledné normálové síly působící na podložku, abychom z ní určili třecí sílu mezi podložkou a pravým klínem. Tato normálová síla se skládá ze svislé složky $F_n \sin\alpha$ síly F_n, ze svislé složky $fF_n \cos\alpha$ třecí síly mezi oběma klíny a z tíhové síly $m_2 g$. Třecí síla od vodorovné stěny je pak $f\left(F_n \sin\alpha + fF_n \cos\alpha + m_2 g\right)$. Z druhého Newtonova zákona pro pohyb pravého klínu v horizontálním směru platí

$$F_n \cos\alpha - fF_n \sin\alpha - f\left(F_n \sin\alpha + fF_n \cos\alpha + m_2 g\right) = m_2 a_1 \operatorname{tg}\alpha\,,$$

kde jsme již dosadili za a_2 z rovnosti $a_2 = a_1 \operatorname{tg}\alpha$, protože pohyb klínů je na sebe navázaný stejně jako v případě bez tření. Vzniklou soustavu převedeme vhodnými algebraickými úpravami do tvaru

$$\begin{aligned} m_1 g - F_n\left(\sin\alpha + 2f\cos\alpha - f^2\sin\alpha\right) &= m_1 a_1\,,\\ -fm_2 g + F_n\left(\cos\alpha - 2f\sin\alpha - f^2\cos\alpha\right) &= m_2 a_1 \operatorname{tg}\alpha\,. \end{aligned}$$

Obě rovnice vhodně přenásobíme a sečteme

$$\begin{aligned} m_1 g\left(\cos\alpha - 2f\sin\alpha - f^2\cos\alpha\right) - fm_2 g\left(\sin\alpha + 2f\cos\alpha - f^2\sin\alpha\right)\,,\\ = a_1\left(m_1\left(\cos\alpha - 2f\sin\alpha - f^2\cos\alpha\right) + m_2\operatorname{tg}\alpha\left(\sin\alpha + 2f\cos\alpha - f^2\sin\alpha\right)\right)\,. \end{aligned}$$

Dalšími algebraickými úpravami najdeme řešení

$$a_1 = g\frac{1 - f^2 - 2f\operatorname{tg}\alpha - \frac{m_2}{m_1}f\left(2f + \left(1 - f^2\right)\operatorname{tg}\alpha\right)}{1 - f^2 - 2f\operatorname{tg}\alpha + \frac{m_2}{m_1}\operatorname{tg}\alpha\left(2f + (1 - f^2)\operatorname{tg}\alpha\right)}\,.$$

Všimněme si, že dosazením $f = 0$ dostaneme stejný vzorec jako v základní úloze.

Václav Mikeska
v.mikeska@fykos.cz

Fyzikální korespondenční seminář je organizován studenty MFF UK. Je zastřešen Oddělením pro vnější vztahy a propagaci MFF UK a podporován Ústavem teoretické fyziky MFF UK, jeho zaměstnanci a Jednotou českých matematiků a fyziků.