Úloha IV.4 ... vymyslete si sami

7 bodů; průměr 6,16; řešilo 32 studentů

Máme černou skříňku se třemi výstupy (A, B a C). Víme, že obsahuje n rezistorů se stejným odporem, ale nevíme jak jsou zapojeny. Změříme tedy odpory mezi dvojicemi bodů AB, BC a CA a zjistíme, že $R_{\mathrm{AB}} = 3\,\Omega$, $R_{\mathrm{BC}} = 5\,\Omega$ a $R_{\mathrm{CA}} = 6\,\Omega$. Zjistěte, kolik nejméně rezistorů může skříňka obsahovat a určete příslušný odpor jednoho rezistoru.

Matěj to vymyslel velmi rychle.

Při řešení úlohy lze postupovat několika různými způsoby. Jelikož máme jen jeden druh součástky, kterou můžeme použít (víme, že všechny odpory uvnitř jsou stejné), můžeme zkoušet sestavovat různá zapojení mezi třemi výstupy a zjišťovat, jaké budou výsledné odpory. Neznámý počet odporů uvnitř nám ale bude práci značně ztěžovat. Dalším způsobem je nahradit si celý vnitřní obvod třemi různými odpory zapojenými do trojúhelníku nebo do hvězdy. My si ukážeme oba postupy.

brute-force

Označme si nejprve počet odporů n. Toto číslo budeme po jednom postupně zvyšovat a hledat, zda existuje dané zapojení.

Zároveň nás nebude zajímat konkrétní poloha bodů A, B a C, protože ty můžeme přeznačením libovolně vyměňovat. Budeme se zajímat pouze o poměr výstupních odporů, protože ten je lineárně závislý na odporu R jednoho rezistoru. Hledáme poměr 3:5:6.

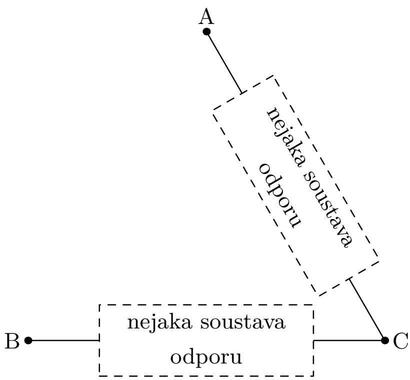
$n = 1$

Z jednoho odporu skříňku zřejmě nepostavíme.

$n = 2$

Povšimněme si, že se největší hodnota odporu mezi dvěma výstupy se nerovná součtu zbývajících dvou odporů. Dva odpory mezi třemi výstupy lze ale zapojit pouze sériově, tedy jeden výstupní odpor by musel být součtem předchozích dvou.

Toto je klíčové pozorování, které nám dále usnadní práci. Zjišťujeme tu, že obvod nemůže být zapojen tak, že každá cesta mezi dvěma vzdálenějšími výstupy vede přes prostřední výstup, jak je zobrazeno na obrázku **??**.



Proto už dále nebudeme takovou možnost zapojení uvažovat.

$n = 3$

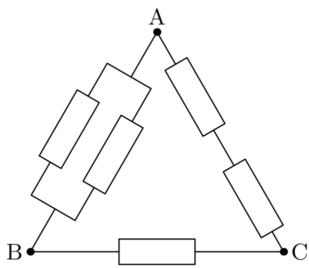
Pro tři odpory máme pouze dvě možná zapojení: trojúhelník nebo hvězda (neuvažujeme zapojení vyloučená výše). Snadno nahlédneme, že obě tato zapojení jsou symetrická a vedla by tak k naměření stejných hodnot pro jakoukoliv dvojici výstupů.

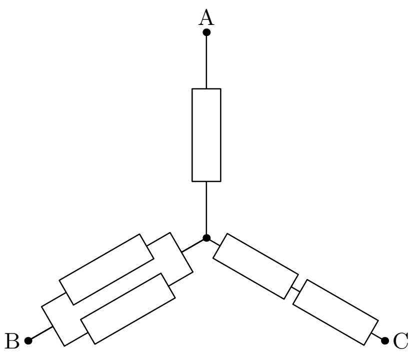
$n = 4$

Víme, že každé uvažované zapojení tří odporů má tři osy symetrie. Přidáním jednoho dalšího rezistoru do obvodu se zbavíme pouze dvou z nich. Vždy nám jedna osa symetrie zůstane, což implikuje naměření stejných hodnot na dvou různých výstupech. Jelikož jsme naměřili tři různé hodnoty odporu, nelze vnitřní obvod sestavit ani ze čtyř rezistorů.

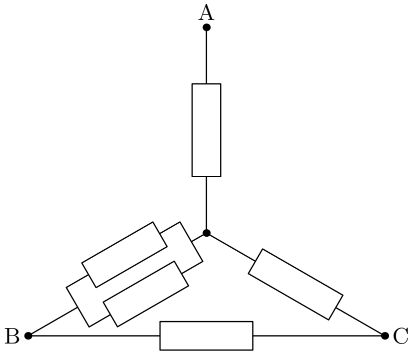
$n = 5$

Přidáním dalšího rezistoru už jsme schopni sestavit nesymetrický obvod. Začneme-li si vypisovat všechna možná zapojení pěti rezistorů mezi třemi výstupy, podaří se nám najít pouze tři nesymetrická zapojení.[1]





[1] Důkaz zde uvádět nebudeme. Podařilo-li se vám najít nějaké další zapojení, zkuste si ho překreslit do co nejjednodušší podoby a zjistíte, že je buď symetrické, nebo je to jedno ze tří uvedených zapojení.



Jednotlivé výstupní odpory pro zapojení ve tvaru hvězdy vypočítáme jednoduše sečtením dvou „ramen“ spojujících dané vrcholy

$$
\begin{aligned}
R^\star_{AB} &= R^\star + \frac{R^{\star 2}}{R^\star + R^\star} = 1\frac{1}{2} R^\star ., \\
R^\star_{BC} &= \frac{R^{\star 2}}{R^\star + R^\star} + R^\star + R^\star = 2\frac{1}{2} R^\star , \\
R^\star_{CA} &= 2R^\star + R^\star = 3R^\star ,
\end{aligned}
$$

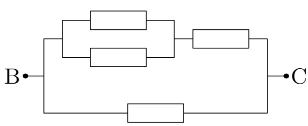
Poměr odporů mezi výstupy je tedy 3 : 5 : 6.

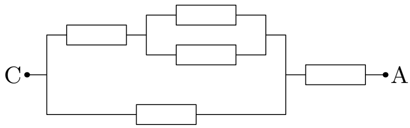
Výstupní odpory v zapojení do trojúhelníku spočítáme jako paralelní zapojení části spojující dané body a větve procházející přes třetí vrchol

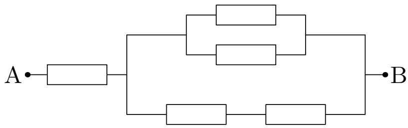
$$
\begin{aligned}
R^\triangle_{AB} &= \frac{\frac{1}{2} R^\triangle \cdot 3R^\triangle}{R^\triangle + 2R^\triangle + \frac{1}{2} R^\triangle} = \frac{\frac{3}{2}}{\frac{7}{2}} R^\triangle = \frac{3}{7} R^\triangle , \\
R^\triangle_{BC} &= \frac{R^\triangle \cdot \left(2\frac{1}{2}\right) R^\triangle}{R^\triangle + 2R^\triangle + \frac{1}{2} R^\triangle} = \frac{\frac{5}{2}}{\frac{7}{2}} R^\triangle = \frac{5}{7} R^\triangle , \\
R^\triangle_{CA} &= \frac{2R^\triangle \cdot \left(1\frac{1}{2}\right) R^\triangle}{R^\triangle + 2R^\triangle + \frac{1}{2} R^\triangle} = \frac{\frac{6}{2}}{\frac{7}{2}} R^\triangle = \frac{6}{7} R^\triangle .
\end{aligned}
$$

U tohoto zapojení nám vyšel také poměr 3 : 5 : 6.

Výstupní odpory třetího zapojení spočítáme následovně (pomoci může přehlednější překreslení jednotlivých situací a použití základních pravidel pro dva sériově nebo paralelně zapojené rezistory)







$$
\begin{aligned}
R^{\triangledown}_{CA} &= R^{\triangledown} + \frac{R^{\triangledown}\frac{3}{2}R^{\triangledown}}{R^{\triangledown}+\frac{3}{2}R^{\triangledown}} = \frac{8}{5}R^{\triangledown}\\
R^{\triangledown}_{AB} &= R^{\triangledown} + \frac{2R^{\triangledown}\frac{1}{2}R^{\triangledown}}{2R^{\triangledown}+\frac{1}{2}R^{\triangledown}} = \frac{7}{5}R^{\triangledown}\\
R^{\triangledown}_{BC} &= \frac{R^{\triangledown}\frac{3}{2}R^{\triangledown}}{R^{\triangledown}+\frac{3}{2}R^{\triangledown}} = \frac{3}{5}R^{\triangledown}\,.
\end{aligned}
$$

Teď jsou odpory rozděleny v poměru 3 : 8 : 7, což není požadovaný poměr.

$n \geq 6$

Nemá smysl hledat dál, protože jsme již našli zapojení s menším počtem použitých rezistorů.

Závěr

Zjišťujeme, že úloha má dvě možná řešení, přičemž oba obvody sestávají z pěti rezistorů. Odpor jednoho rezistoru zjistíme jednoduše. Stačí vzít např. odpor mezi body A a B a položit ho roven 3Ω

$$
\begin{aligned}
1\frac{1}{2}R^{\star} &= 3\Omega \quad \Rightarrow \quad R^{\star} = 2\Omega\,,\\
\frac{3}{7}R^{\triangle} &= 3\Omega \quad \Rightarrow \quad R^{\triangle} = 7\Omega\,.
\end{aligned}
$$

Přímý výpočet

Další metodou výpočtu je převedení úlohy na hledání jednotlivých dílčích odporů. Začneme tím, co jsme ukázali v prvním obrázku, tzn. že obvod nemůže mít jediný uzel v některém výstupním bodě, a obvody tohoto typu nebudeme uvažovat.

Složitějším zapojením tří bodů jsou sestavy trojúhelník a hvězda. Zkusíme tedy spočítat, jaké odpory by tato hvězda nebo trojúhelník musely obsahovat, a poté se je pokusíme seskládat ze samotných stejných odporů. Označme $R_{\mathrm{AB}} = 3\Omega$, $R_{\mathrm{BC}} = 5\Omega$ a $R_{\mathrm{CA}} = 6\Omega$. Dále jednotlivé odpory, ze kterých se skládá hvězda, budeme značit R_A, R_B a R_C. Můžeme si napsat soustavu tří rovnic

$$\begin{aligned} R_\mathrm{AB} &= R_\mathrm{A} + R_\mathrm{B}\,, \\ R_\mathrm{BC} &= R_\mathrm{B} + R_\mathrm{C}\,, \\ R_\mathrm{CA} &= R_\mathrm{C} + R_\mathrm{A}\,. \end{aligned}$$

Řešením této soustavy je

$$\begin{aligned} R_\mathrm{A} &= \frac{R_\mathrm{AB} - R_\mathrm{BC} + R_\mathrm{CA}}{2} = 2\Omega\,, \\ R_\mathrm{B} &= \frac{R_\mathrm{BC} - R_\mathrm{CA} + R_\mathrm{AB}}{2} = 1\Omega\,, \\ R_\mathrm{C} &= \frac{R_\mathrm{CA} - R_\mathrm{AB} + R_\mathrm{BC}}{2} = 4\Omega\,. \end{aligned}$$

Vidíme, že vycházejí „pěkné“ hodnoty. Dále řešíme jen úvahou. Jestliže jeden odpor má 2Ω, sériové zapojení dvou takových rezistorů má 4Ω a paralelní zapojení těchto dvou rezistorů má 1Ω, což nám dává řešení úlohy v podobě prvního obrázku hvězdy s pěti použitými rezistory.

Kdybychom se na začátku rozhodli místo hvězdy počítat zapojení pro trojúhelník, dostali bychom značně komplikované rovnice,[2] ale jejich vyřešením také dostaneme poměr tří dílčích odporů 1:2:4.

I v tomto případě je potřeba ověřit, že žádné zapojení jednoho až čtyř rezistorů nevede na požadované odpory mezi výstupy. To provedeme stejně jako v metodě brute-force.

Matěj Mezera
m.mezera@fykos.cz

[2] Výrazně jednodušší je nejprve spočítat hvězdu a poté jí převést na trojúhelník (to lze buď podle známých převodních vztahů nebo vlastním výpočtem).