Úloha VI.E . . . skladba jako od Cimrmana

12 bodů; průměr 10,96; řešilo 27 studentů

Sežeňte si skleničku na víno, ideálně tenkou se zabroušeným okrajem. Nejprve změřte vnitřní průměr skleničky v závislosti na výšce ode dna. Pak ji rozeznívejte, ideálně navlhčeným prstem pohybem po jejím okraji – někdy to chce trochu trpělivosti. Změřte závislost frekvence tónů, které sklenička vydává v závislosti na výšce naplnění vody v ní (alespoň pro 5 hladin vody a dvě frekvence v každé výšce).

Nápověda: Pokud je sklenička tenkostěnná, můžete její vnitřní rozměry považovat za stejné jako vnější a díky tomu závislost jejího průměru na výšce určit z vhodné fotografie s měřítkem. Pro měření zvuku doporučujeme freeware program Audacity (Rozbor → Kreslit spektrum).

Karel si rád hraje se skleničkami na společenských večeřích.

Teorie

Když kroužíme navlhčeným prstem po okraji vinné sklenky (je-li okraj pozlacený, nefunguje to až tak dobře), její stěny se rozechvívají a výsledné vibrace vnímá ucho jako zvuk o určité frekvenci, tedy tón. Je známo, že s rostoucí výškou hladiny ve skleničce se výška tónu snižuje. V tomto experimentu si klademe za cíl přibližně určit závislost tónu na výšce hladiny.

Při matematickém rozboru vycházíme z článku *French, A. P.: In Vino Veritas: A study of wineglass acoustics*[1], ve kterém je problematika rezonance skleničky důkladně popsána. Veškeré vzorce a netriviální informace mají za zdroj tento článek.

Nejprve si zde uvedeme veličiny a konstanty, které budeme používat.

- Parametry skleničky:
  - výška H
  - poloměr R
  - tloušťka stěny a
- Parametry materiálu:
  - hustota skla ϱ_g
  - hustota vody ϱ_l
  - Youngův modul pružnosti skla Y

Pro základní rezonanční frekvenci prázdné skleničky platí podle článku vzorec

$$f_0 = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{3Y}{5\varrho_\mathrm{g}}\frac{a}{R^2}}\sqrt{1+\frac{4}{3}\left(\frac{R}{H}\right)^4}\,. \tag{1}$$

Pro frekvenci částečně naplněné skleničky při výšce hladiny h platí

$$f_h/f_0 \approx 1\Big/\sqrt{1+\frac{1}{5}KR\frac{\varrho_\mathrm{l}}{\varrho_\mathrm{g}a}\left(\frac{h}{H}\right)^4}\,, \tag{2}$$

kde K je konstanta závislá na tvaru skleničky, řádově 1.

Skleničku považujeme za válec; do vzorce by se měla dosazovat *efektivní výška* skleničky, nikoliv skutečná. Ta efektivní je o něco menší, protože sklenička je zaoblená. Počítat s ní by

[1] Veřejně dostupný je např. na `https://sci-hub.io/10.1119/1.13147`

bylo zbytečně složité, přepočet na efektivní výšku zahrneme do konstanty K a za H dosadíme skutečnou výšku.

Pro tento experiment potřebujeme následující:

- vinná sklenka
- pravítko
- počítač se zabudovaným mikrofonem a s nainstalovaným softwarem na analýzu záznamu zvuku (Audacity)

Skleničku vyfotíme s přiloženým pravítkem. Na obrázku změříme její šířku v několika bodech. Poté pomocí softwaru Audacity určíme dominantní frekvence tónů vydávaných při určité výšce hladiny a najdeme funkci, na které závisí.

Měření

Parametry skla jsou přibližně $\varrho_g \approx 3\,\mathrm{g\cdot cm^{-3}}$, $Y \approx 60\,\mathrm{GPa}$. Hustota vody $\varrho_l = 1{,}0\,\mathrm{g\cdot cm^{-3}}$.

Referenční sklenička je tenkostěnná (tloušťka stěny max. jeden milimetr, tedy $a = 1\,\mathrm{mm}$) s čistým okrajem (na obr. 1).

Obr. 1: Sklenka

Na obrázku jsme změřili její průměr v několika výškách, měřeno od hrdla. Hloubka skleničky H je asi $7{,}2\,\mathrm{cm}$, jako měřítko sloužilo pravítko s milimetrovou stupnicí, tedy s větší přesností než na jedno desetinné místo nemá smysl výsledky uvádět.

Vidíme, že šířka skleničky u hrdla je $6\,\mathrm{cm}$ (tedy uvažujme $R = 3\,\mathrm{cm}$) a šířka skleničky v nejširším bodě asi $7{,}3\,\mathrm{cm}$, tedy vnitřní průměr skleničky v nejširším bodě je přibližně stejný jako její hloubka.

Výšku tónu jsme měřili pro výšku hladiny ode dna skleničky v celých centimetrech. Pro každou výšku hladiny jsme provedli tři nebo čtyři měření a změřili jsme jak dominantní frekvenci (a k ní sdružené frekvence), tak i nečekanou, leč výraznou boční frekvenci (ta byla tak vysoká, že tón byl uchem špatně slyšitelný, ale objevovala se pravidelně). Naměřené hodnoty i se spočtenými statistickými odchylkami jsou uvedeny v tabulkách 2 a 3.

Tab. 1: Průměr skleničky

výška od hrdla [cm]	průměr [cm]
0,0	6,0
1,0	6,6
2,0	7,1
3,0	7,2
4,0	7,3
5,0	7,0
6,0	6,2

Tab. 2: Výška tónu

výška hladiny [cm]	dominantní frekvence [Hz]	vedlejší frekvence [Hz]
0,0	1 266	14 734
0,0	1 265	14 735
0,0	1 268	14 739
0,0	1 267	14 732
1,0	1 258	14 743
1,0	1 258	14 742
1,0	1 260	14 740
2,0	1 249	14 750
2,0	1 246	14 754
2,0	1 243	14 757
2,0	1 245	14 755
3,0	1 208	14 790
3,0	1 209	14 791
3,0	1 209	14 792
4,0	1 115	14 884
4,0	1 118	14 884
4,0	1 115	14 885
5,0	977	15 026
5,0	978	15 023
5,0	977	15 022

Systematická odchylka je řádově menší než frekvence i o hodně menší než rozdíly mezi frekvencemi (do 4 Hz na jedno měření).

Dosadíme za proměnné ve vzorcích (zatím se skutečnou výškou). Vidíme, že vzorec počítá zhruba poloviční frekvence, než jaké jsme naměřili, což jsou frekvence sdružené. I bez přepočtu na efektivní výšku tedy vychází rozumné výsledky.

Když zkusíme odhadnout efektivní výšku (třeba pomocí matematického software), pro prázdnou skleničku nejlépe vyjde hodnota přibližně $H' = 6{,}3\,\mathrm{cm}$. Zkusíme to tedy dosadit. Výsledky pro skutečnou i efektivní výšku jsou v tabulce 4.

Tyto hodnoty sedí přesněji, stále sice ne úplně (což by bylo divné, protože v měření máme

Tab. 3: Výška tónu, průměr

výška hladiny [cm]	dominantní frekvence [Hz]	vedlejší frekvence [Hz]
0,0	$1\,266{,}5 \pm 0{,}7$	$14\,735 \pm 2$
1,0	$1\,258{,}7 \pm 0{,}7$	$14\,741{,}7 \pm 0{,}9$
2,0	$1\,245{,}8 \pm 0{,}9$	$14\,754 \pm 2$
3,0	$1\,208{,}7 \pm 0{,}4$	$14\,791{,}0 \pm 0{,}6$
4,0	$1\,116 \pm 1$	$14\,884{,}3 \pm 0{,}4$
5,0	$977{,}3 \pm 0{,}4$	$15\,024 \pm 1$

Tab. 4: Frekvence vypočítané ze vzorců 1 a 2

výška hladiny [cm]	frekvence [Hz]	frekvence s efektivní výškou [Hz]
0,0	624,78	633,24
1,0	624,55	632,84
2,0	621,09	626,91
3,0	606,76	602,99
4,0	572,61	550,12
5,0	516,17	472,84

určitě nějaké nepřesnosti), ale už dost přesně na to, abychom mohli potvrdit funkčnost vzorce.

Vynesli jsme do grafu 2 naměřené frekvence spolu s teoretickou hodnotou $2f_h$ podle vzorců (1) a (2). Také jsme provedli fit funkcí ve tvaru

$$\frac{2F}{\sqrt{1+Cx^4}}\,, \tag{3}$$

což je přesně funkce $2f_h$ (2) s dvěma neznámými parametry zahrnujícími všechny fyzikální veličiny vystupující v teorii, pro šest hodnot h, které známe, a z toho jsme zjistili hodnoty $F = (631{,}5 \pm 0{,}5)\ \mathrm{Hz}$ a $C = \left(1{,}069 \cdot 10^{-3} \pm 1{,}1 \cdot 10^{-5}\right)\ \mathrm{cm}^{-4}$.

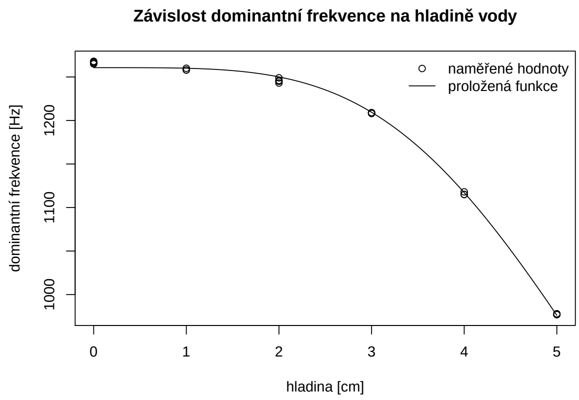
Diskuze

Podle vzorce 1 vychází $f_0 = 633{,}24\,\mathrm{Hz}$. Parametr F v (3) odpovídá f_0, parametr C výrazu $\frac{KR\varrho_1}{5\varrho_\mathrm{g} aH'^4}$, jehož teoretická hodnota pro $K = 1$ je $1{,}270 \cdot 10^{-3}\,\mathrm{cm}^{-4}$.

Potvrdilo se, že s rostoucí hladinou frekvence klesá. Vidíme, že uvedená teorie velice přesně odpovídá měření, ačkoli některé veličin umíme pouze odhadnout.

Největší chybou v měření byl lidský faktor (např. nepravidelné kroužení prstem, nepřesné dolévání vody), dále jsme se setkávali s omezenou přesností měřidel. Také mohlo měření ovlivnit to, že sklenička nebyla upevněna v držáku, nýbrž přidržována rukou, a že se pokaždé nacházela trochu jinak daleko od mikrofonu. Další nepřesnosti v měření jsou způsobené např. tvarem skleničky, nehomogenitou skla a různou tloušťkou stěn skleničky.

Není jasné, jakému vlnění odpovídá neslyšitelná frekvence, může jít například o efekt dutinového (Helmholtzova) rezonátoru – řádově to odpovídá, ale teorie pro provázané vlnění ve vodě, vzduchu (a případně skle) je extrémně složitá.



Obr. 2: Frekvence v grafu

Závěr

Naměřili jsme dvě výrazné frekvence zvuku. Jedna z nich je uvedená v tabulce 5 a dobře odpovídá teorii kmitů skleničky, druhá není slyšitelná.

Tab. 5: Dominantní frekvence

výška hladiny [cm]	frekvence [Hz]
0,0	1 266,5
1,0	1 258,7
2,0	1 245,8
3,0	1 208,7
4,0	1 116,0
5,0	977,3

Pokud se vám hra na skleničku zalíbila a chcete si poslechnout, jak zní hudební nástroj složený ze skleniček (tzn. glass harp), najděte si na YouTube třeba pána jménem Robert Tiso a užijte si koncert.

Markéta Calábková
calabkovam@fykos.cz

Fyzikální korespondenční seminář je organizován studenty MFF UK. Je zastřešen Oddělením pro vnější vztahy a propagaci MFF UK a podporován Ústavem teoretické fyziky MFF UK, jeho zaměstnanci a Jednotou českých matematiků a fyziků.