

Úloha VI.P ... vypařující se asteroid

9 bodů; průměr 2,77; řešilo 22 studentů

Umístíme hodně velký kus ledu, dejme tomu o průměru 1 km, do blízkosti hvězdy podobné Slunci na kruhovou dráhu. Blížkost je tak velká, že rovnovážná teplota černého tělesa by v této vzdálenosti byla zhruba 30 °C. Co se bude dít s takovým asteroidem a jeho dráhou? Asteroid nemá vázanou rotaci.

Karel má rád astrofyziku, a tak zase něco navrhuje.

Na začiatku máme jedno zanedbateľne malé teleso obiehajúce okolo Slnka po kruhovej dráhe, čo je jednoduchý prípad problému dvoch telies (kde po celý čas rátame s tým, že menšie teleso je oproti väčšiemu zanedbateľne hmotné). Keďže kométa sa bude pri takejto teplote vyparovať, (kométy sa vypařujú vždy, pokiaľ ich teplota je väčšia ako 0 K) s časom sa bude meniť hmotnosť kométy. Ako bude teda pôsobiť táto zmena hmotnosti na dráhu kométy?

Vieme že dráha kométy je kruhová (zo zadania). Pre kruhovú dráhu, v prípade, že hmotnosť obiehajúceho telesa je zanedbateľná oproti hmotnosti centrálnemu, platí rovnica

$$\frac{v^2}{r} = G \frac{M}{r^2},$$

kde v je obežná rýchlosť obiehajúceho telesa, G je gravitačná konštanta, M je hmotnosť centrálnemu telesa a r je polomer dráhy obiehajúceho telesa. Ako môžeme vidieť, tento vzťah nijako nezávisí na tom, aká je alebo ako sa mení hmotnosť menšieho telesa. Navyše na kométu môžu pôsobiť len sily v radiálnom smere (tým sa budeme venovať neskôr). Z toho vieme, že hmotnostný úbytok kométy nijak neovplyvní. Napriek tomu chceme ale vedieť, asi ako rýchlo sa taký asteroid bude roztápať.

Keďže kométa je kus čistého ľadu a ľad je kryštál, na jeho roztápanie sa môžeme pozeráť z rôznych uhlov pohľadu. Skúsime uhol pohľadu nezahŕňajúci fyziku skupenských premien kryštálov látok z viacerých molekúl. Napríklad ten, že kus ľadu je v tepelnej rovnováhe v čase $t = 0$. S plynutím času rátame, že asteroid rotuje rozumne tak, že sa kométa ohrieva na celom povrchu z dlhodobého hľadiska rovnomerne. Na jej povrchu sa ohrievajú len najvrchnejšie vrstvy atómov, tie s nejakou účinnosťou predávajú časť energie spodnej vrstvy a tá zase spodnej a tak ďalej až po stred. Rozdiel teplôt na povrchu a v strede tak môže byť za predpokladu dostatočného dopadajúceho výkonu, ktorý výrazne prekoná efekt vodivosti ľadu, zanedbateľný. Teraz sa pozrime na to, čo sa deje na povrchu. Máme kryštalickú mriežku molekúl, pričom každý atóm kmitá v mriežke inou rýchlosťou a s inou vlastnou energiou kmitania. Spočítať to, akú energiu potrebuje molekula na povrchu kryštálu na to, aby opustila kryštál len z pôsobenia síl v molekularnej mriežke, je zrejme veľmi zložitá fyzika, presne tá, ktorej sa chceme vyhnúť. Avšak vieme si pomôcť termodynamikou, v ktorej nepotrebujeme poznať mikroskopické procesy – tie sú dostatočne popísané známymi fyzikálnymi veličinami, napríklad skupenským teplom sublimácie ľadu pri nulovom tlaku. Uvidíme, že aj tabulková hodnota nám prezradí, koľko energie treba dodať na to, aby sa dané množstvo ľadu z kométy odparilo.

Vezmime prípad, že schopné odpariť sa hneď pri potrebnej energii sú častice na povrchu látky (rozumný predpoklad je do hĺbky tak 5-10 častíc). Ak by bol výkon žiarenia dopadajúceho za dostatočne malý časový úsek na celý povrch kométy taký, že by sa celá táto povrchová vrstva okamžite odparila, tak by sme mohli vedenie tepla zanedbať a rátať, že za ten krátky časový úsek sa vyparí istá povrchová vrstva kométy a zvyšok kométy to nijak neovplyvní. Aby sme celý čas len neteoretizovali, skúsme spočítať, v akých rádoch sa pohybuje čas, za ktorý sa pri tomto procese celá kométa roztopí. Najprv si z danej teploty absolútne čierneho telesa (AČT)

určíme žiarivý výkon, ktorý dopadá na povrch kométy. Výkon dopadajúci na absolútne čierne teleso vo vzdialenosti kométy s prierezom S je

$$P_1 = S\Phi_S \frac{R_Z^2}{R_k^2}$$

kde Φ_S je slnečná konštanta pre Zem, R_Z vzdialenosť Zeme od Slnka a R_k je vzdialenosť, v ktorej sa nachádza kométa. Tu nie je jasné, o aké AČT sa jedná – rovnovážna teplota závisí od jeho povrchu aj rozloženia teploty na ňom. My uvažujeme, že to nie je guľa, ale ploché teleso, ktoré je k Slnku stále privrátene jednou stranou (najjednoduchší tvar) a chladné na druhej strane. Potom vieme výkon vyžiarený takýmto AČT s teplotou $T_{\text{ačt}} = 30^\circ\text{C}$ ako

$$P_2 = S\sigma T_{\text{ačt}}^4$$

(dosadzujeme absolútne teploty v K).

Z rovnováhy žiarivých výkonov $P_1 = P_2$ vieme dopočítať vzdialenosť, v ktorej sa nachádza naše myslené AČT a teda aj kométa. Po dosadení hodnôt zistíme, že kométa sa nachádza niekde za dráhou Marsu (1,69 AU). Na našu kométu svieti Slnko tiež s výkonom P_1 , čo pre $S = \pi R^2$ (R je polomer kométy) vychádza $0,48 \text{ kW}\cdot\text{m}^{-2}$.

Pre začiatok budeme rátať, že sa všetka energia, ktorú kométa naspäť nevyžiari, spotrebuje na sublimáciu hmoty z kométy. Z fázového diagramu vody pri nulovom tlaku¹ vieme približne odčítať maximálnu hodnotu termodynamickkej teploty povrchu, pri ktorej kométa dokáže existovať ako kus ľadu a nedôjde k jej sublimácii $T \approx 200 \text{ K}$. Časť dopadajúceho výkonu sa stratí tým, že kométa vyžaruje ako AČT s teplotou najviac T . Minimálny výkon, ktorý sa musí využiť na sublimovanie kométy, je teda rovný

$$P = \pi R^2 \sigma T_{\text{ačt}}^4 - 4\pi R^2 \sigma T^4.$$

Môžeme vidieť, že kométa prijíma žiarenie zo štvrtiny povrchu, ale vyžaruje z celého povrchu. Je to analogické tomu, akoby bola na celom povrchu ožarovaná 4-krát slabšie. Teraz podme zrátať, ako rýchlo sa vyparí. Keďže keď sa bude vyparovať, bude sa znižovať jej povrch a s ním aj množstvo absorbovaného žiarenia kométou, je rozumné nájsť model roztápania kométy, ktorý nezávisí od jej plochy. Na sublimáciu ľadovej vrstvy s hrúbkou ΔR potrebujeme teplo $4\pi R^2 \Delta R \varrho l$, kde $l \doteq 2,8 \text{ MJ}\cdot\text{kg}^{-1}$ je skupenské teplo sublimácie a $\varrho \doteq 900 \text{ kg}\cdot\text{m}^{-3}$ je hustota ľadu. Zanedbajme teplo potrebné na zohriatie ľadu na teplotu povrchu, to je dosť malé. Tiež zanedbajme závislosť l na teplote a tlaku – pri atmosférickom tlaku a teplote 0°C je teplo potrebné na sublimáciu moly ľadu cca 51 kJ a pri teplote -30°C je to $51,1 \text{ kJ}$, na jeden kilogram je to teda zhruba $2,8 \text{ MJ}$ aj vo vákuu pri teplotách okolo -70°C . Za malý čas Δt sa na sublimáciu teda spotrebuje teplo $P\Delta t = 4\pi R^2 \Delta R \varrho l$, z čoho dostávame

$$\frac{\Delta R}{\Delta t} = \frac{\sigma}{\varrho l} \left(\frac{1}{4} T_{\text{ačt}}^4 - T^4 \right) \doteq 1,2 \cdot 10^{-8} \text{ m}\cdot\text{s}^{-1}.$$

Celá kométa by sa mala vypariť za $1 \text{ km} / 1,2 \cdot 10^{-8} \text{ m}\cdot\text{s}^{-1} \doteq 3000$ rokov. Tento odhad samozrejme nie je veľmi presný, lebo teplota povrchu kométy môže byť úplne iná a na druhej strane sa nemusí všetko teplo dokonale spotrebovať na sublimáciu.

Skúsime sa teraz pozrieť na celú udalosť z mikroskopickejšieho hľadiska. Vezmime veľkosť jednej molekuly vody $\sim 0,1 \text{ nm}$ a rátajme, že vyparí sa za malý čas Δt majú šancu molekuly

¹http://www1.lsbu.ac.uk/water/water_phase_diagram.html

z hlčky $d \sim 1 \text{ nm}$ (cca desiatky molekúl pod povrchom). Ak neuvažujeme vyžarovanie vrstvy ladu, na ktorú teplo dopadne, tak rátame, že na plochu S dopadne za čas Δt teplo, ktoré sa rozdelí medzi lad o hmotnosti $dS\rho$. Toto teplo musí lad roztopiť, teda $dS\rho l \sim S\sigma T_{\text{act}}^4 \Delta t$. Ak by sme rátali Δt naozaj malý, napr. stotinu sekundy, tak dostaneme $d \sim 2 \text{ nm}$, čo skutočne zodpovedá predpokladom. Keďže sa jedná len o hrubé odhady, môžeme byť s hodnotou odparu $2 \cdot 10^2 \text{ nm}\cdot\text{s}^{-1}$ celkom spokojní.

Týmto tempom vieme usúdiť, že za jedinú sekundu sa (za predpokladu, že asteroid je absolútne čierny – mimochodom veľmi rozumný predpoklad, pretože je známe, že kométy sú azda najčiernejšie objekty v Slnčnej sústave – a teplo nevedie, resp. vedie len tak pomaly, že všetok dopadnutý výkon sa spotrebuje len na sublimáciu a zohriatie pary na povrchu) dokáže odpariť zhruba 200 nm z celého polomeru kométy, čo znamená, za predpokladu, že sa nezmení jej vzdialenosť od Slnka, že celá vysublimuje za $t_{\text{death}} \sim 150$ rokov.

Tu sme použili úplne iný model a dostali úplne iný výsledok. Neuvažovali sme vyžarovanie kométy ako AČT, namiesto toho sme predpokladali, že dopadajúca energia sa celá spotrebuje na sublimáciu (a prípadne aj niečo iné, napr. dodatočné zahriatie) malej povrchovej vrstvy ladu. Poďme sa teraz pozrieť, aké efekty by mohli ovplyvniť dráhu nášho asteroidu (vieme, že samotná zmena hmotnosti to nespôsobí).

Na všetky telesá v slnčnej sústave neustále pôsobí tlak žiarenia. Ten má tým väčší vplyv, čím je teleso väčšie, odrazivejšie a ľahšie. Prvý parameter vypovedá o tom, aká veľká je plocha, na ktorú dopadajú slnčné fotóny, ktorých hybnosť sa využije, druhý to, aká časť hybnosti fotónov sa premení na hybnosť telesa (pre prievitné teleso je to 0%, pre čierne 100% a pre úplne odrazivé 200%). Tretí parameter hovorí o tom, aký bude mať týmto fotónmi generovaná sila pomer voči zotrvačnosti, to znamená, ako veľmi ovplyvní celkovo dráhu asteroidu. Náš asteroid je celý z vody, má tvar gule a je 1 km veľký. Rátame, že je absolútne čierne teleso a nachádza sa vo vzdialenosti 1,69 AU od Slnka. To sú všetky hodnoty, ktoré potrebujeme k odhadu tejto sily. Postupovať budeme tak, že si zrátame, akú hybnosť majú dokopy všetky fotóny, ktoré dopadnú na asteroid. Táto hybnosť sa pripočíta k hybnosti asteroidu v smere kolmo preč od Slnka.

Za sekundu dopadne na 1 m^2 celkom 480 J energie. To je na celý povrch 1,5 GJ. Fotón s energiou E má hybnosť

$$p = \frac{E}{c},$$

čo nezávisí na vlnovej dĺžke. Celková hybnosť častíc, ktoré dopadnú na kométu za daný čas, je teda cca $5 \text{ kg}\cdot\text{m}\cdot\text{s}^{-1}$. Rátame s tým, že kométa je absolútne čierne teleso, teda táto hybnosť sa premietne do zmeny hybnosti celého telesa; prírastok hybnosti za čas je zároveň sila, ktorá tlačí kométu od Slnka. Zrýchlenie smerom od Slnka udeľované kométe Slnkom bude

$$a = \frac{\Delta p(t)}{m(t)\Delta t},$$

kde $\Delta p(t)$ je hybnosť častíc, ktoré dopadnú za malý čas Δt , a $m(t)$ je hmotnosť v čase t . Udeľenú hybnosť ako funkciu času vieme zapísať ako

$$p(t) = p_0 \left(\frac{r_0 - kt}{r_0} \right)^2,$$

kde p_0 je hybnost za čas na začiatku, r_0 je polomer kométy na začiatku a faktor $k = 0,009 \text{ m}\cdot\text{d}^{-1}$ je vyjadrením rýchlosti zmenšovania polomeru (pre čas roztopenia 300 rokov). Hmotnosť ako funkcia času je

$$m(t) = \frac{4}{3}\pi(r_0 - kt)^3 \varrho,$$

kde ϱ je hustota ľadu. (Ak budeme počítat s hustotou vody, rádovo to nezmení výsledok.) Rýchlosť, ktorú by za čas τ získala, je teda rovná

$$v = \int_0^\tau \frac{3p_0}{4\pi r_0^2 \varrho} \frac{1}{r_0 - kt} dt = \frac{3p_0}{4\pi r_0^2 \varrho k} \ln \frac{r_0}{r_0 - k\tau}.$$

Kinetická energia kométy sa tým zvýši najviac o $mv^2/2$; táto energia je dostatočná na to, aby sa kométa vzdialila od Slnka o

$$s = \frac{v^2 R_k^2}{2GM},$$

kde M je hmotnosť Slnka. Teraz si potrebujeme zvoliť čas τ – hornú medzu integrálu. Nemôžeme zvoliť čas, za ktorý sa kométa rozpustí (r_0/k), to by integrál divergoval; nech to je teda 99,9% tohto času. Vzdialenosť s , o ktorú sa vzdiali kométa od Slnka vplyvom tohto efektu, je potom rovná približne 200 m, teda poloha kométy sa prakticky nezmení. Predpoklad, že sa aj množstvo energie absorbované do jednotky plochy nezmení, je teda správny.

Ďalším efektom, ktorý by potenciálne vedel ovplyvniť dráhu kométy, je takzvaný Yarkovského efekt. Ide tu o to, že musíme rátať s tým, že tak ako prijatie fotónu hybnosť dodáva (t.j. ak absorbujeme fotón z jedného smeru, dodá nám to hybnosť v smere, v akom letel fotón), tak emitovanie fotónu hybnosť odoberá, t.j. ak emitujeme fotón, získame rovnako veľkú hybnosť ako mal fotón, len v opačnom smere ako ten, ktorým vyletel fotón. Vieme si to predstaviť ako delo, ktoré vystrelí guľu jedným smerom a trochu ho to rozchýbe smerom druhým. Ak teda máme absolútne čierne teleso, ktoré emituje rovnaké fotóny na všetky strany rovnako, tak sa tie hybnosti navzájom vykompenzujú a celková hybnosť tohto telesa spôsobená týmto javom je 0. Avšak ak máme teleso, ktoré je na jednej strane teplejšie ako na druhej, tak dôsledkom toho majú fotóny emitované jedným smerom nižšiu energiu (hybnosť) ako fotóny emitované z druhej strany a teda výsledná zmena hybnosti takéhoto telesa je nenulová.

V predošlých výpočtoch s našou kométou rátame s tým, že jej teplota je na celom povrchu konštantná, Yarkovského efekt by sme teda pozorovať nemali, ale ak by sme aj pripustili rozdiely teplôt na povrchu, dá sa ľahko overiť, že na zmene polomeru dráhy kométy to bude mať vždy menší efekt ako tlak žiarenia. Konkrétne ak by mala na privrátenej strane kométa teplotu AČT v danej vzdialenosti a na odvrátenej 0K, tak by sa hybnosť emitovaných termálnych fotónov rovnala hybnosti fotónov prijatých od Slnka a preto by hybnosť udelená kométe za jednotku času bola nanajvýš taká, ako je hybnosť za jednotku času získaná od tlaku slnečného žiarenia. Posledné, čo má na kométu vplyv, je tlak slnečného vetra; ten je však ešte slabší ako predchádzajúce dva efekty.

Ak si to zhrnieme, tak kométa pravdepodobne zanikne na dráhe podobnej tej, na ktorú sme ju vypustili. Aj krátky čas pred zánikom sa bude stále nachádzať o menej ako polomer pôvodnej kométy od počiatkovej kruhovej trajektórie, teda ak by sme si dráhu kométy na začiatku predstavili ako torus/pneumatiku, tak sa pri svojom zániku stále bude nachádzať vo vnútri tohoto torusu. Zrýchlenie, ktorým na ňu pôsobí slnečný vietor, síce pri zániku rastie do nekonečna, ale to, čo sa deje, keď už je kométa dostatočne malá na to, aby ju to zaneslo

nezanedbatelne ďaleko, na náš odhad času nemá podstatný vplyv. (Navyše sa asi bude roztápať inak ako veľká kométa.)

Záver: Vyšetřili sme, ako by sa pohyboval asteroid celý z vodného ľadu (absolútne čierny, čo je pri kométach veľmi dobré priblíženie, nakoľko majú albedo – odrazivosť obvykle okolo 6 %, čo je spôsobené tým, že obsahujú aj malé množstvo prachu) vo vzdialenosti približne 1,69 AU od Slnka. Tvar jeho dráhy by sa až do konca jeho „života“ prakticky nezmenil, len by sa mierne zväčšil jej polomer (o asi 200 metrov). Asteroid by prestal existovať za približne stovky až tisícky rokov. Aj keď naše výpočty boli približné, takto zodpovedajú (najme tie o zmene dráhy) fyzikálnej realite. Zmeny dráh komét spôsobené vyššie spomínanými efektmi sú pozorovateľné len vďaka superpresným prístrojom. To, čo reálne ovplyvňuje dráhy komét oveľa signifikantnejšie, sú prechody blízko hmotných objektov, ktoré gravitačne zakrivia ich dráhu.

Jakub Jambrich
jakubj@fykos.cz

Fyzikální korespondenční seminář je organizován studenty MFF UK. Je zastřešen Oddělením pro vnější vztahy a propagaci MFF UK a podporován Ústavem teoretické fyziky MFF UK, jeho zaměstnanci a Jednotou českých matematiků a fyziků.

Toto dílo je šířeno pod licencí Creative Commons Attribution-Share Alike 3.0 Unported. Pro zobrazení kopie této licence navštivte <http://creativecommons.org/licenses/by-sa/3.0/>.