

Úloha VI.3 ... relativistický Zenonův paradox

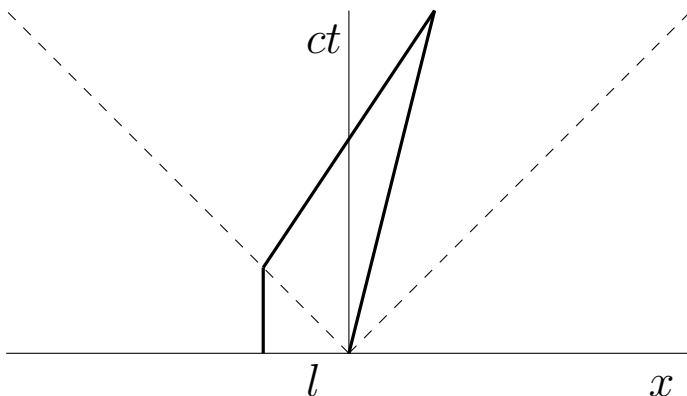
6 bodů; průměr 3,35;

řešilo 23 studentů

Superman a Flash se rozhodli, že si dají závod. Závod se koná v hlubokém vesmíru, protože na Zemi není dostatečně dlouhá rovná pláž. Flash, protože je pomalejší, startuje s délkovým náskokem l před Supermanem. Flash v jednu chvíli vyběhne s konstantní rychlostí v_F srovnatelnou s rychlostí světla. Ve chvíli, kdy si Superman všimne, že Flash vyběhl, vyběhne také, a to konstantní rychlostí $v_S > v_F$. Za jak dlouho Superman Flashe dožene (z pohledu Supermana)? A za jak dlouho Flashe dožene Superman (z pohledu Flashe)? A byl vůbec závod spravedlivě odstartován, resp. dokázali byste vymyslet spravedlivější způsob (přičemž náskok l má být ponechán)?

Ďídků.

Velmi efektivní metodou, jak řešit kinematické úlohy speciální teorie relativity, jsou prostorčasové diagramy. Jde o graf, kde na vodorovnou osu vynášíme prostorovou souřadnici a na svislou čas, resp. hodnotu ct . Jedna událost je pak v grafu reprezentována bodem a světočára (historie hmotného bodu) čarou. Protože je rychlost světla v rámci STR významnou konstantou, zakresluje se do diagramu i tzv. světelný kužel, tedy světočáry $x = \pm ct$.



Obr. 1: Časoprostorový diagram situace.

Pro řešení naší úlohy bude nejjednodušší vycházet z diagramu 1 vztahového vůči pozorovateli stojícímu v klidu v místě, ze kterého startuje Flash. Na diagramu vidíme, přesně dle zadání, že Superman stojí, než k němu dorazí informace o vyběhnutí Flashe, poté vybíhá také.

Nyní určíme souřadnice událostí, kdy a kde se Superman s Flashem potkají, a také, kdy pro ně začneme měřit čas. Uvědomit si, že záleží na události, odkud pro oba závodníky měříme čas, a tyto události rozumně zvolit bylo součástí zadání. My si zde pro každého ze závodníků zvolíme jako počátek událost, kdy daný hrdina ze svého pohledu vyběhl. Souřadnice těchto počátků jsou $(ct_{F0}, x_{F0}) = (0, 0)$ pro Flashe a $(ct_{S0}, x_{S0}) = (l, -l)$ pro Supermana. Souřadnice události, ve které Superman dožene Flashe, získáme řešením soustavy rovnic

$$\begin{aligned} x &= v_F t \\ x + l &= v_S \left(t - \frac{l}{c} \right), \end{aligned}$$

což jsou rovnice příslušných přímek v diagramu. Souřadnice zmíněné události jsou

$$(ct_C, x_C) = l \frac{c + v_S}{v_S - v_F} \left(1, \frac{v_F}{c} \right).$$

Tyto časy a vzdálenosti jsou ale měřeny v klidové soustavě. Pokud chceme určit časy z pohledu závodníků, tedy jejich vlastní časy, musíme vzít v úvahu dilataci času

$$\Delta\tau = \Delta t \sqrt{1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2},$$

kde $\Delta\tau$ je interval vlastního času, Δt interval času v klidové soustavě a v rychlost daného hrdiny vůči klidové soustavě. Odečtením časů událostí v klidové soustavě a aplikací dilatace času pak dostáváme vlastní časy Supermana a Flashe

$$\begin{aligned} \Delta\tau_S &= (t_C - t_{S0}) \sqrt{1 - \left(\frac{v_S}{c}\right)^2} = \frac{l}{c} \frac{c + v_F}{v_S - v_F} \sqrt{1 - \left(\frac{v_S}{c}\right)^2}, \\ \Delta\tau_F &= (t_C - t_{F0}) \sqrt{1 - \left(\frac{v_F}{c}\right)^2} = \frac{l}{c} \frac{c + v_S}{v_S - v_F} \sqrt{1 - \left(\frac{v_F}{c}\right)^2}. \end{aligned}$$

Závod ale nebyl odstartován příliš spravedlivě, z pohledu Supermana i Flashe vyběhl Flash dříve, než Superman.¹ Pokud bychom ale na půli cesty mezi Supermana a Flashe postavili pozorovatele, který by závod odstartoval (např. bliknutím baterky do obou směrů) a oba závodníci by vyběhli ve chvíli, kdy by k nim tento signál dorazil, vyběhli by z pohledu Supermana i Flashe současně. Pro úplnost dodejme, že z jejich pohledu by závod trval $\Delta\tau_S = l/(v_S - v_F) \sqrt{1 - (v_S/c)^2}$, resp. $\Delta\tau_F = l/(v_S - v_F) \sqrt{1 - (v_F/c)^2}$.

Lukáš Timko
lukast@fykos.cz

Fyzikální korespondenční seminář je organizován studenty MFF UK. Je zastřešen Oddělením pro vnější vztahy a propagaci MFF UK a podporován Ústavem teoretické fyziky MFF UK, jeho zaměstnanci a Jednotou českých matematiků a fyziků.

Toto dílo je šířeno pod licencí Creative Commons Attribution-Share Alike 3.0 Unported.
Pro zobrazení kopie této licence navštivte <http://creativecommons.org/licenses/by-sa/3.0/>.

¹Poznamenejme, že současnost se nešíří se světelným kuzelem, ale odpovídá konstantní časové souřadnici daného pozorovatele. Superman tedy sice viděl vyběhnout Flashe ve chvíli, kdy vybíhal i on sám, ale stalo se to v jeho minulosti.