

Úloha V.2 . . . koule ve vazkých tekutinách 3 body; průměr 2,98; řešilo 43 studentů

V některých případech řešení úloh s odporem vzduchu či obecně tekutiny používáme pro odporovou sílu Newtonův vzorec $F = C \rho S v^2 / 2$, kde C je součinitel odporu tělesa ve směru pohybu tělesa, ρ je hustota tekutiny, S je průřez a v je rychlost pohybu tělesa. Ten obvykle docela dobře platí pro turbulentní prostředí. Zajímáme se o kouli, pro kterou $C = 0,50$. V laminárním proudění pak obvykle používáme Stokesův vztah $F = 6\pi\eta r v$, kde η je dynamická viskozita tekutiny a r je poloměr koule. Pokud máme nějakou konkrétní kouli, je možné, aby se pro nějakou rychlost tyto odpory rovnaly? Jak bude tato rychlost záviset na poloměru koule?

Karel na konferenci zaslechl, že lidé mají problémy s rovnostmi.

Vzhledem k tomu, že otázkou je, jestli se mohou dva výrazy rovnat, tak matematickou odpověď na takovou otázku je obvykle ano, pokud nedojde k nějakému sporu. Proto dáme síly do rovnosti s uvážením, že průřez koule je $S = \pi r^2$

$$\frac{1}{2} C \rho S v^2 = 6\pi\eta r v \quad \Rightarrow \quad v_0 = 0 \quad \vee \quad v = \frac{12\pi\eta r}{C \rho S} = \frac{24\eta}{\rho r}.$$

Zdá se, že jsme k nějakému sporu nedošli. Vypadá to, že požadovaná rychlost bude buď nulová¹, nebo nepřímo úměrná poloměru koule. Triviální řešení, tedy že při nulové rychlosti budou obě síly nulové, je zřejmě správné. Pro jistotu si ještě můžeme dosadit hodnoty v netriviálním řešení, pro nějakou takovou běžnou kouli a běžnou tekutinu. Vybereme si železnou kuličku s poloměrem $r = 1,0 \text{ cm}$, která je ponořená do vody o hustotě $\rho = 1,00 \text{ g}\cdot\text{cm}^{-3}$. Voda má dynamickou viskozitu $\eta = 1,0 \cdot 10^{-3} \text{ Pa}\cdot\text{s}$ při pokojové teplotě. Výsledná rychlost je pak $2,4 \cdot 10^{-3} \text{ m}\cdot\text{s}^{-1}$. To je relativně nízká rychlost. Pro vyšší rychlosti bude odhad odporové síly vyšší pro Newtonův vztah a pro nižší rychlosti bude vyšší pro Stokesův vztah.

Ve skutečnosti bychom neměli prakticky používat ve stejné oblasti oba vzorce, protože jeden je vhodný popis pro laminární proudění a druhý pro turbulentní. Ostatně vidíme, že bychom měli používat zpravidla ten odpor, který má vyšší hodnoty. Turbulentní se totiž stává proudění pro vysoké rychlosti a laminární je naopak v nízkých rychlostech. I když toto tvrzení není také úplně přesné, protože rychlost, která nám vyšla pro rovnost u koule, odpovídá řádově desítkám v hodnotě Reynoldsova čísla. To odpovídá ještě laminárnímu proudění a za turbulentní se považuje obvykle proudění od cca od hodnoty 1 000 Reynoldsova čísla či o něco vyšší.

Komentáře k došlým řešením

Hodnocení bylo mírné, i vzhledem k tomu, že jsme v původním vzorovém řešení také zapomněli uvést jako jedno z řešení nulovou rychlost. Kdo na to nezapomněl a k tomu svoje řešení dobře okomentoval, mohl snadno získat bonusový bod.

Karel Kolář
karel@fykos.cz

Fyzikální korespondenční seminář je organizován studenty MFF UK. Je zastřešen Oddělením pro vnější vztahy a propagaci MFF UK a podporován Ústavem teoretické fyziky MFF UK, jeho zaměstnanci a Jednotou českých matematiků a fyziků.

Toto dílo je šířeno pod licencí Creative Commons Attribution-Share Alike 3.0 Unported.
Pro zobrazení kopie této licence navštivte <http://creativecommons.org/licenses/by-sa/3.0/>.

¹Zjevně pak na velikosti koule nebude záležet.