Úloha V.1 ... vesmírný sněhulák

3 body; průměr 3,17; řešilo 52 studentů

Jakou silou bude přidržována hlava našeho sněhuláka, který si volně poletuje ve vesmíru? Máme sněhuláka tvořeného pouze homogenními koulemi o hustotě ϱ, jejichž středy leží na jedné přímce a koule se dotýkají, jsou umístěné v pořadí od největší po nejmenší a s tím, že nejmenší koule (hlava) má poloměr r a každá další má dvojnásobný poloměr, co ta předchozí. Ve vesmíru je pouze náš sněhulák a nijak nerotuje.

Bonus: *Zobecněte úlohu pro počet koulí $N \geq 3$. Bude se síla blížit nějaké konečné hodnotě pro $n \to \infty$, nebo půjde k nekonečnu?*

Karel vymýšlel úlohu na Fyziklání a pak si řekl, že by ten výsledek nechtěl kontrolovat.

Řešme rovnou bonusovou úlohu a nakonec dostaneme výsledek základní verze dosazením $N = 3$. Koule si označme čísly od nejmenší 1 po největší N. Poloměr i-té koule bude $r_i = 2^{i-1}r$. Hmotnost i-té koule bude

$$m_i = \varrho V_i = \frac{4}{3}\pi\varrho r_i^3 = \frac{4}{3}\pi\varrho 2^{3(i-1)} r^3 \,.$$

Síla, kterou hledáme, je součtem jednotlivých sil

$$F_{\mathrm{celk}} = \sum_{i=2}^{N} F_{1i} = \sum_{i=2}^{N} G\frac{m_1 m_i}{d_{1i}^2}\,,$$

kde F_{1i} je gravitační síla mezi první a i-té kouli (kde $i \geq 2$) a d_{1i} je vzdálenost jejich středů. Vzdálenost středů už není úplně triviální. Z první a i-té koule máme jeden poloměr a z koulí mezi nimi dvojnásobek poloměru. Rozepsat si to můžeme jako

$$d_{1i} = r_1 + 2\left(r_2 + \dots + r_{i-1}\right) + r_i = r\left(1 + 2\left(2 + 4 + \dots + 2^{i-2}\right) + 2^{i-1}\right)\,.$$

Nyní využijeme vzorec pro součet konečné geometrické řady

$$\sum_{k=0}^{K} aq^k = a\,\frac{q^{k+1}-1}{q-1}\,.$$

$$d_{1i} = r\left(1 + 4\frac{2^{i-2}-1}{2-1} + 2^{i-1}\right) = r\left(3\cdot 2^{i-1} - 3\right) = 3r\left(2^{i-1}-1\right)\,.$$

Nyní můžeme dosadit všechno do síly

$$F_{\mathrm{celk}} = \sum_{i=2}^{N} G\frac{\frac{4}{3}\pi\varrho r^3 \frac{4}{3}\pi\varrho r_i^3}{\left(3r\left(2^{i-1}-1\right)\right)^2} = G\sum_{i=2}^{N}\frac{2^4\pi^2\varrho^2 r^4}{3^4}\frac{2^{3(i-1)}}{\left(2^{i-1}-1\right)^2} =$$
$$= \frac{\pi^2\varrho^2 G r^4}{3^4}\sum_{i=2}^{N}\frac{2^{3i+1}}{\left(2^{i-1}-1\right)^2}$$

Nejdříve dořešíme bonusové otázky. Jednak prakticky ihned vidíme, že pro $i \to \infty$ jde $F_{1i} \to \infty$, dokonce roste řádově jako 2^i. Tím pádem součet těchto členů půjde také do nekonečna. Pokud se pokusíme udělat nějaký částečný součet pro obecné N, tak když to například necháme spočítat Wolfram Mathematicu, tak dostaneme sumu nějakých ošklivých polynomů generovaných digamma funkcí a jejími derivacemi, takže nic pěkného. Takže nám bude stačit ještě ten relativně pěkný zápis, u kterého jsme skončili.

Řešením základní úlohy je

$$F_{123} = \frac{\pi^2\varrho^2 G r^4}{3^4}\sum_{i=2}^{3}\frac{2^{3i+1}}{\left(2^{i-1}-1\right)^2} = \frac{\pi^2\varrho^2 G r^4}{3^4}\left(128+\frac{1\,024}{9}\right) = \frac{2^7\cdot 17}{3^6}\pi^2\varrho^2 G r^4$$
$$\doteq \varrho^2 r^4\cdot 2{,}0\cdot 10^{-9}\,\mathrm{N{\cdot}kg^{-2}{\cdot}m^2}\,.$$

Hustotu ani poloměr jsme neměli zadanou. Nicméně můžeme si říci, že máme třeba sněhuláka železného $\varrho \doteq 7\,900\,\mathrm{kg{\cdot}m^{-3}}$ a nejmenší koule má poloměr $r = 1\,\mathrm{m}$. Tedy na Zemi oproti člověku by to byl docela velký sněhulák, ale zase ve srovnání s velikostí planety by byl malý. V tom případě by hlava držela silou $F_{123} \doteq 0{,}12\,\mathrm{N}$. Tedy držela by, ale slabě. Dokud nemáme v našem vesmíru nic jiného, ani průvan, ani makroskopickou elektromagnetickou interakci, tak by ta hlava držela. Samozřejmě kdyby někdo do hlavy trochu strčil, tak by pak sjela a nebyl by to už sněhulák, ale tři koule navzájem se dotýkající.

Karel Kolář
`karel@fykos.cz`

Fyzikální korespondenční seminář je organizován studenty MFF UK. Je zastřešen Oddělením pro vnější vztahy a propagaci MFF UK a podporován Ústavem teoretické fyziky MFF UK, jeho zaměstnanci a Jednotou českých matematiků a fyziků.