Úloha IV.P ... statistikův denní chléb

9 bodů; průměr 5,30; řešilo 20 studentů

Známe to všichni, krajíc chleba namazaný medem nebo marmeládou, zakousneme se a najednou je kapka mazadla na ruce a jsme za prasata. Spočítejte, jak závisí pravděpodobnost, že v krajíci bude díra skrz naskrz, v závislosti na jeho tloušťce. Model kynutí těsta necháme na vás. (Třeba rovnoměrně rozmístěné bubliny s exponenciálně rozděleným poloměrem je dobrý model.)

Michal se pobryndal.

Model jedné bubliny

Nejdřív je potřeba udělat si pořádek v pojmech. Budeme tedy uvažovat rovnoměrně rozdělené bubliny s exponenciálně rozděleným poloměrem. Počet bublin označíme k. Bubliny uvažujme kulovité. Za rovnoměrné rozmístění považujme to, když středy bublin budou ve vrcholech krychlové mřížky s délkou hrany $r > 0$. Exponenciální rozdělení je rozdělení náhodné veličiny x takové, že:

$$f(x) = \begin{cases} 0 & x < 0 \\ \lambda \mathrm{e}^{-\lambda x} & x \geq 0 \end{cases} ,$$

kde $f(x)$ je hustota pravděpodobnosti a $\lambda > 0$. Zintegrováním od minus nekonečna do x snadno zjistíme, že její distribuční funkce $F(x)$ (tedy pravděpodobnost, že hodnota náhodné veličiny je menší než x) je pro x nezáporné rovna $1 - \mathrm{e}^{-\lambda x}$. Nyní uvažujme krajíc s danou tloušťkou d. Rozdělíme si práci na několik případů.

V prvním případě budeme uvažovat velmi zjednodušený model, kdy se v průběhu kynutí žádné dvě bubliny nespojí tak, aby spoječně vytvořily tunel. Potom nám stačí zanedbat šířku bublin (budeme tedy pro jednoduchost počítat pouze s jejich výškou). Také se nechceme starat o to, kde mají bubliny střed, proto řekneme, že střed je vždy ve výšce $d/2$. Potom lze s výškami bublin počítat jako s poloměry, tedy mají také exponenciální rozdělení, jenom konstanta λ bude poloviční. Výšky jednotlivých bublin jsou navzájem nezávislé náhodné veličiny. Pravděpodobnost, že výška bubliny bude menší než d, je:

$$Pr(x < d) = \int_0^d \lambda \mathrm{e}^{-\lambda x} \mathrm{d}x = \left[\lambda \mathrm{e}^{-\lambda x} \left(-\lambda^{-1}\right)\right]_0^d = \left[-\mathrm{e}^{-\lambda x}\right]_0^d = 1 - \mathrm{e}^{-\lambda d} .$$

Tedy pravděpodobnost, že v krajíci nebude díra, tedy že žádná bublina nebude vyšší než d, je $(1 - \mathrm{e}^{-\lambda d})^k$.

Abychom měli nějaký odhad, tak nastavme $k = 800$ (Krajíc buď dlouhý 20 cm a široký 10 cm, bubliny mějte mezi sebou vzdálenost 1 cm. Více bublin nad sebou neuvažuji a krajíc si aproximuji obdélníkem s danými rozměry. Jeho obsah vynásobím čtyřmi, protože na jeden centimetr čtvereční krajíce připadají čtyři body bublinové mřížky.). Nedovoluji bublinám, aby se spojovaly, tedy mě tlouška krajíce nezajímá.

Letmým pohledem na krajíc chleba (Šumava) vidíme, že děr s průměrem 1 cm je málo, ale kolem je spousta menších bublin, od boku střelme 1 000krát víc. Tedy $\lambda = 6.9$ (to znamená, že pravděpodobnost, že výška bubliny přesáhne 1, tedy $\mathrm{e}^{-\lambda}$, je zhruba 0.001). Potom pravděpodobnost, že při tomto modelu kynutí nebude v krajíci díra, je $(1 - \mathrm{e}^{-6.9d})^{800}$, což je pro malá d nepříjemně malé číslo. Pokud si d zvolíme 1 (jednotka je 1 cm), tak je to zhruba 0.446 pro to, že nevznikne díra. Tento model je dostatečně přesný pro krajíc, jehož tloušťka je menší než vzdálenost mřížových bodů.

Model více bublin

Ve druhém přiblížení si zpřesníme pojem „rovnoměrné rozmístění". Nyní za něj budeme uvažovat to, že na jednotku objemu připadá konstantní počet bublin a že lze krajíc rozdělit na několik výškových sloupců, mezi nimiž se bubliny nebudou spojovat. To znamená, že najednou je počet bublin funkcí závislou na tloušťce krajíce, zafixujeme-li si jeho plochu. Za jednotku objemu si zvolíme $1\,\mathrm{cm}^3$.

Ve druhém případě dovolíme, aby bubliny mohly být nad sebou a aby se bubliny v jednom výškovém sloupci mohly spojovat. To je ještě poměrně jednoduchý, ale realističtější model. Jediná změna je, že místo výšky jedné bubliny uvažujeme součet jejich výšek a chceme, aby byl menší než d. Je to ovšem jen horní odhad výšky tunelu, v reálném světe by se bubliny spojily a celková výška by byla menší.

*N*ásleduje část s pokročilejší matematikou, pokud chcete, můžete ji s čistým svědomím přeskočit.

Nyní chceme nějak odvodit, jaká bude hustota pravděpodobnosti pro spojené bubliny. Máme-li dvě nezávislé veličiny (výšky bublin jsou zřejmě navzájem nezávislé), pravděpodobnost, že nastanou obě zároveň, je součin jejich pravděpodobností. Chceme-li pravděpodobnost toho, že jejich součet bude roven z, jednu z veličin volíme nezávisle, tedy bude mít hodnotu x, a druhá už bude závislá na x s hodnotou $z - x$. Pokud bychom pracovali s diskrétními veličinami, které jsou navíc nezávislé, sečetli bychom takovéto součiny přes všechna x a měli bychom kýženou pravděpodobnost. Ale výška bubliny je spojitá. Analogie součtu přes všechny hodnoty spojité veličiny je integrál.

Existuje věta z teorie pravděpodobnosti zabývající se součtem nezávislých náhodných veličin, říká se jí Věta o konvoluci: Jsou-li X, Y nezávislé náhodné veličiny se spojitým rozdělením s hustotami f_X, f_Y, pak má veličina $Z = X + Y$ rozdělení s hustotou

$$g(z) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_X(x) f_Y(z - x)\mathrm{d}x\,,$$

kde z je hodnota součtu, tedy výška celého tunelu. Je sice jen pro součet dvou nezávislých náhodných veličin, ale je vidět (jak ukážeme níže), jak spočítat hustotu součtu tří, čtyř, … náhodných veličin. Jenom budeme muset odhadnout nějaké rozdělení možného počtu bublin nad sebou. Ten může nabývat kladných celočíselných hodnot, tedy je to diskrétní veličina. Ukrojme si nyní tlustší krajíc o výšce $1{,}5\,\mathrm{cm}$ stejných rozměrů, tedy v něm bude 2 400 bublin a vždy budou tři nad sebou, tedy tam bude 800 trojic. To stačí, abychom ukázali, jak se počítá rozdělení součtu výšek více než dvou bublin nad sebou. Potřebujeme nyní spočítat hustotu rozdělení pro součet tří výšek bublin. Nejdřív to tedy spočítáme pro součet dvou (hustota pro hodnoty menší než nula je nulová, tedy integrál uřízneme z jedné strany v nule $(f(x))$ a z druhé v z $(f(z - x))$, g bude pro záporné hodnoty také identická nula):

$$g(z) = \int_0^z \lambda \mathrm{e}^{-\lambda x} \lambda \mathrm{e}^{-\lambda z + \lambda x}\mathrm{d}x = \int_0^z \lambda^2 \mathrm{e}^{-\lambda z}\mathrm{d}x = \lambda^2 z \mathrm{e}^{-\lambda z}\,.$$

Teď to spočítáme pro tři bubliny nad sebou, tedy sečteme jednu a dvě bubliny:

$$h(z) = \int_0^z \lambda^2 x \mathrm{e}^{-\lambda x} \lambda \mathrm{e}^{-\lambda z + \lambda x}\mathrm{d}x = \int_0^z \lambda^3 \mathrm{e}^{-\lambda z} x\mathrm{d}x = \lambda^3 \frac{z^2}{2} e^{-\lambda z}\,.$$

Nyní potřebujeme spočítat pravděpodobnost, že tři bubliny nad sebou nepřesáhnou výšku d, využijeme metodu per partes:

$$
\begin{aligned}
Pr(x < d) &= \int_0^d \lambda^3 \frac{x^2}{2} \mathrm{e}^{-\lambda x} \mathrm{d}x = -\lambda^2 \frac{1}{2} d^2 \mathrm{e}^{-\lambda d} + \int_0^d \lambda^2 x \mathrm{e}^{-\lambda x} \mathrm{d}x = \\
&= -\lambda^2 \frac{1}{2} d^2 \mathrm{e}^{-\lambda d} + \lambda d \mathrm{e}^{-\lambda d} + \int_0^d \lambda \mathrm{e}^{-\lambda} \mathrm{d}x = 1 - \mathrm{e}^{-\lambda d} \left(\frac{1}{2}\lambda^2 d^2 + \lambda d + 1\right) .
\end{aligned}
$$

Takto jsme spočítali pravděpodobnost, že bubliny v jednom výškovém sloupci společně nevytvoří tunel. Pro výpočet finální pravděpodobnosti stačí příslušné pravděpodobnosti vynásobit, tedy v našem případě pro $k = 800$, $\lambda = 6.9$ a $d = 3$ (teď počítáme s krajícem tloušťky 3 cm, předtím to bylo jen 1 cm) vyjde víc než 0.999 pro to, že nevznikne díra.

Obecně, když kombinujeme několik exponenciálně rozdělených veličin, vznikne náhodná veličina s gamma rozdělením. To je ještě pokročilejší partie matematiky, tedy se gamma rozdělením tady nebudeme zabývat a zájemci nechť si ho najdou na internetu.

Obecný model

Pro úplnost jenom zmíníme model, ve kterém se bubliny mohou protínat, tedy se jejich výšky mohou překrývat. Potom neplatí, že když součet výšek přesáhne d, tak v krajíci musí vzniknout díra. V tomto modelu je to, zda vznikne díra, závislé na poloze středů a je nad výpočetní i časové možnosti autorů alespoň přibližně určit hledanou pravděpodobnost. Jenom podotkneme, že ani tento model není přesný, neboť při opravdovém kynutí se středy bublin v chlebu navzájem pohybují v závislosti na více faktorech, například na hustotě a viskozitě těsta a na aktuální velikosti okolních bublin, což je dynamicky se vyvíjející model (všechny dosud zmíněné modely byly statické). V obecném modelu musíme navíc uvažovat náhodný počet bublin (třeba řídící se Poissonovým rozdělením).

Simulace

Napsali jsme simulaci Modelu více bublin v jazyce C++, zde uvádíme pseudokód:

```
int sloupec(double d, double lambda){
    int pocet := poissonovo_rozdeleni(d);
    for i := 0 to pocet−1 do vygeneruj_bublinu();
    //stred rovnomerne na (0,d), polomer exponencialne s parametrem lambda
    double horni_mez := dira_odspodu();
    //nastavi si horni mez na 0 a hleda, jestli ji nejaka bublina protne
    //pokud ano, nastavi si horni mez na horni okraj te bubliny a opakuje
    if (horni_mez>1) return 1; //vznikla dira
    return 0; //nevznikla dira
}

int main(void){
    int p_sloupcu := poissonovo_rozdeleni(800);
    int uspech := 0;
    for i := 0 to p_sloupcu−1 do uspech := uspech + sloupec(d,6.2);
}
```

Raději ještě slovně popíšeme, co se v kódu děje. Nejprve si vytvoříme funkci `sloupec`, která simuluje jeden výškový sloupec. Vrátí 1, když v krajíci vznikla díra, a 0, když díra nevznikla. Tuto funkci pak dokola voláme tolikrát, kolik máme sloupců.

Výsledky vygenerované funkčním kódem pro různé poloměry ($\lambda = 6.9$) jsou k vidění v tabulce 1. Každé měření jsme zopakovali 10 000krát, tedy můžeme říci, že jsme to změřili pro deset tisíc krajíců.

Tab. 1: Výsledky simulace

d	počet sloupců	počet děr	počet děravých krajíců
1	7 999 638	107 058	9 999
2	7 996 136	7 537	5 250
3	8 002 974	494	484
4	8 000 854	38	38
5	8 001 825	2	2

Tyto hodnoty vypadají rozumně pro hodně bublavý chleba. Vůbec ale nekorespondují s výpočty pro jednu bublinu, s výpočty pro více bublin si rozumí už více, ale stále moc ne. Vyšlo nám, že pro výšku 1 je pravděpodobnost vzniku díry téměř stoprocentní. Bude to nejspíš tím, že více parametrů volíme náhodně, a také to, že vzniká více bublin nad sebou.

Na závěr bychom chtěli uvést tabulku, ve které shrneme výsledky spočtených teoretických modelů. Ve sloupci „hodnota“ jsou uvedené pravděpodobnosti, že nevznikne díra.

Tab. 2: Výsledky měření

model	pravděpodobnost	hodnota pro $d = 1$
jedna bublina	$1 - \left(1 - \mathrm{e}^{-\lambda d}\right)^k$	0.446
více bublin	$1 - \left(1 - \mathrm{e}^{-\lambda d}\left(\frac{1}{2}\lambda^2 d^2 + \lambda d + 1\right)\right)^k$	$5.219 \cdot 10^{-12}$

U každého modelu k označuje počet výškových sloupců. U druhého modelu uvádíme pravděpodobnost pro tři bubliny nad sebou (proto vyšlo tak malé číslo), výpočet pravděpodobnosti pro jiný počet bublin je z výše uvedeného postupu zřejmý.

Ještě si musíme rozmyslet, jak jsou uvedené modely realistické. Model jedné bubliny se tváří, že by mohl být realistický pro hodně tenký chleba, tj. takový, ve kterém bude jen jedna bublina v každém sloupci. To má nevýhodu, že v reálném světě nevíme, jak přesně je takový krajíc tlustý, a bez toho nenastavíme konstanty. Model více bublin se snaží tohoto vyvarovat, ale vlastně trpí tím samým problémem – jak víme, že jsme trefili přesně tu tloušťku, kde jsou tři bubliny nad sebou? Simulující program se to snaží léčit tím, že pro každé zvolené d vygeneruje náhodně jiný počet bublin, ale i u něj může být problém, že jsme třeba špatně nastavili poměry.

Markéta Calábková
`calabkovam@fykos.cz`

Jakub Dolejší
`dolejsi@fykos.cz`

Fyzikální korespondenční seminář je organizován studenty MFF UK. Je zastřešen Oddělením pro vnější vztahy a propagaci MFF UK a podporován Ústavem teoretické fyziky MFF UK, jeho zaměstnanci a Jednotou českých matematiků a fyziků.