Úloha II.5 ... várnice potřetí

7 bodů; průměr 4,77; řešilo 44 studentů

Uvažujte klasickou várnici s kohoutkem dole a se vzduchotěsným víkem nahoře. Kolik čaje je možné si nalít, než budeme muset otevřít ventil, který vyrovná tlak vzduchu nad čajem s okolním tlakem? *Lukáše na soustředění trápilo, kolik čaje má být ve várnici.*

Várnici na čaj můžeme aproximovat válcem, který má kohout na odpouštění čaje ve výšce h_0 nad svou dolní podstavou. Průřez kohoutu budeme považovat pro naše potřeby za zanedbatelně malý vůči výšce várnice a nebudeme uvažovat povrchové napětí v kohoutu. Pokud by vás zajímalo, jakou výšku vody by udrželo povrchové napětí, pak se můžete podívat na úlohu XXVIII.IV.E. Nicméně pokud nás zajímá, kolik čaje vyteče, a tedy pouze rozdíl stavu, kdy vyrovnáme tlaky a kdy pak odpustíme co nejvíce kapaliny, tak výška vody, kterou bude „držet“ povrchové napětí, je konstantní, a tedy rozdíl bude stejný. Dále neuvažujeme ani délku kohoutu a dynamický pokles tlaku při průtoku potrubím, protože nás zajímá pouze statický stav.

Užitečnou výšku válce nad kohoutem nazveme H a výšku vody nad kohoutem h pro původní stav před začátkem vypouštění. Vzduch tedy bude zabírat výšku $H - h$. Podstavy válce mají plochu $S = \pi r^2$, kde r je poloměr válce. Výšku, o kterou hladina čaje poklesne, nazveme Δh.

Plyn ve várnici budeme považovat za ideální plyn, protože nás nebudou zajímat vysoké tlaky (maximálně p_a).

Nyní již k samotnému průběhu děje. Nejdřív si připustíme vzduch při zavřeném kohoutu. Tlak ve vzduchu nad hladinou a těsně na hladině označíme p_{1A} a je roven atmosférickému tlaku $p_\mathrm{a} = 10^5\,\mathrm{Pa}$. Tlak ve výšce kohoutu pak bude $p_{1B} = p_\mathrm{a} + \varrho h g$, kde $\varrho \approx 10^3\,\mathrm{kg{\cdot}m^{-3}}$ je hustota čaje a tíhové zrychlení $g = 9{,}81\,\mathrm{kg{\cdot}m^{-2}}$.

Konečný stav pak bude takový, při němž se tlak u kohoutu vyrovná s atmosférickým tlakem, tedy $p_{2B} = p_\mathrm{a}$ a v tom případě bude tlak na čajové hladině $p_{2A} = p_\mathrm{a} - \varrho\left(h - \Delta h\right) g$. Tento tlak bude i v plynu nad hladinou. V plynu v průběhu vypouštění dojde k nějakému polytropickému ději, pro který platí

$$p_{1A} V_1^\alpha = p_{2A} V_2^\alpha \quad \Rightarrow \quad p_{1A}\left(\left(H - h\right) S\right)^\alpha = p_{2A}\left(\left(H - h + \Delta h\right) S\right)^\alpha\,,$$

$$p_\mathrm{a}\left(H - h\right)^\alpha = \left(p_\mathrm{a} - \varrho\left(h - \Delta h\right) g\right)\left(H - h + \Delta h\right)^\alpha\,,$$

kde $\alpha \in \langle 1, \kappa\rangle$ je koeficient polytropického děje, kde dolní mez odpovídá izotermickému ději ($\alpha = 1$) a horní mez adiabatickému ($\alpha = \kappa$, kde $\kappa = 1{,}4$ pro dvouatomový plyn). Reálně by tedy maximální objem, který dokážeme odlít z várnice, závisel na rychlosti nalévání. Pokud by se nám dařilo lít čaj velice rychle, pak bychom se blížili adiabatickému ději a pokud pomalu, pak izotermickému ději. Vzhledem k tomu, že se snažíme odlít co nejvíce, pak bude rozumné uvažovat zhruba izotermický děj $\alpha \approx 1$. Navíc bude hledaná proměnná Δh z rovnice snadno vyjádřitelná formou kvadratické rovnice

$$p_\mathrm{a}\left(H - h\right) = \left(p_\mathrm{a} - \varrho\left(h - \Delta h\right) g\right)\left(H - h + \Delta h\right)\,,$$

$$\left(\Delta h\right)^2 + \left(\frac{p_\mathrm{a}}{\varrho g} - 2h + H\right)\Delta h - h(H - h) = 0\,,$$

$$\Delta h = h - \frac{\frac{p_\mathrm{a}}{\varrho g} + H}{2} + \sqrt{\left(\frac{\frac{p_\mathrm{a}}{\varrho g} + H}{2}\right)^2 - \frac{p_\mathrm{a}}{\varrho g} h}\,.$$

Vybrali jsme kladné řešení, protože jenom to odpovídá zadání naší úlohy. Cílem je zjistit, kolik čaje vyteče. Pro to nám stačí vynásobit změnu výšky kapaliny v nádobě jejím průřezem. Tedy

$$\Delta V = S\Delta h\,.$$

Jaký bude výsledek pro nějaké konkrétní parametry? Várnice může mít například poloměr $r = 20\,\mathrm{cm}$ a efektivní výšku $H = 60\,\mathrm{cm}$. Můžeme se zajímat třeba o situaci, kdy jsou již 2/3 efektivní výšky vypuštěné, tedy $h = 20\,\mathrm{cm}$. V tomto konkrétním případě bychom tedy odpustili $\Delta h \doteq 7{,}7\,\mathrm{mm}$, což odpovídá objemu $\Delta V \doteq 1{,}0\,\mathrm{dl}$. Takže abychom si napustili jeden hrnek, tak bychom museli připustit vzduch ještě alespoň jednou či dvakrát. Maxima toho, kolik můžeme najednou vypustit, dosáhneme pro $h = H/2$, což lze zjistit z hledání extrému $\Delta h(h)$. V tomto případě by hledaný objem byl $\Delta h_{\mathrm{max}} \doteq 1{,}1\,\mathrm{dl}$. Nejméně pak vyteče pro zcela plnou či zcela prázdnou nádobu.

Ještě bychom měli diskutovat, jak moc se náš výsledek, který jsme získali v rámci jistých zanedbání, bude lišit od reality. Jednak jsme už zmínili, že nejspíš nepůjde o izotermické vypouštění či že by tento způsob vypouštění byl velice pomalý, a ve skutečnosti bychom tedy vypustili o něco méně čaje. Na druhou stranu ventilek, který udržuje tlak v nádobě, nemusí být zdaleka dokonalý. Tím, že bude ventilek v průběhu lití čaje připouštět vzduch do nádoby, umožní vypuštění většího množství nápoje. Odpověď pro Lukáše, který s úlohou přišel, je: „Je potřeba si sehnat větší várnici.“, pokud by měl tak velkou, jako jsme odhadli.

Karel Kolář
karel@fykos.cz

Fyzikální korespondenční seminář je organizován studenty MFF UK. Je zastřešen Oddělením pro vnější vztahy a propagaci MFF UK a podporován Ústavem teoretické fyziky MFF UK, jeho zaměstnanci a Jednotou českých matematiků a fyziků.