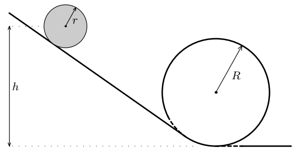
Úloha II.3 ... looping

6 bodů; (chybí statistiky)

Mějme nakloněnou rovinu pod úhlem α, na kterou hladce navazuje kruhová smyčka o poloměru R. Do jaké minimální výšky h musíme na nakloněnou rovinu položit kouli o poloměru r (srovnatelném s R), aby smyčkou projela tak, že s ní bude po celou dobu v kontaktu? Předpokládejte, že koule neprokluzuje.

Kuba přemýšlel nad klasickou úlohou.



Tato úloha je podobná úloze, kdy uvažujeme jen hmotný bod, budeme tedy požadovat, aby výsledek měl tvar po dosazení $r = 0$ shodný s řešením pro hmotný bod. Když hmotný bod nahradíme tuhou koulí, objeví se dvě odlišnosti: odstředivá síla působící na kuličku ve smyčce je nižší, protože těžiště koule se pohybuje po kružnici o poloměru $r' = R - r$, a do kinetické energie tělesa o hmotnosti m je potřeba připočítat rotační energii

$$E_{\mathrm{k}} = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}J\omega^2 \,.$$

Ke zjištění minimální výšky vypuštění je třeba splnit podmínku vyrovnání tíhové a odstředivé síly v nejvyšším bodě smyčky

$$m\frac{v^2}{(R-r)} = mg \,,$$

po jejím splnění koule bezproblémově projede i zbytek smyčky, protože v nejvyšším bodě je kolmý průmět tíhové síly největší a rychlost koule nejmenší. Dalším potřebným vztahem je ZZME (zákon zachování mechanické energie), kde rozdíl potenciální energie kuličky mezi počáteční polohou a nejvyšší polohou ve smyčce odpovídá celkové kinetické energii kuličky v kritickém bodě.

Zamysleme se, zda do úlohy nevnese zesložitění skutečnost, že se kulička pohybuje po zakřiveném podkladu. Nejdříve se v podmínce udržení se v nejvyšší bodě smyčky uvažuje rychlost v pohybu těžiště koule okolo středu smyčky a poté v členu rotační kinetické energie představuje ω rychlost otáčení koule okolo její osy otáčení. Při pohybu po rovině platí jednoduše $\omega = v/r$. Jak ukážeme, že toto platí i při pohybu ve smyčce? Úhel otočení koule kolem své rotační osy φ lze pomocí úhlu natočení kolem středu smyčky ϑ vyjádřit jako

$$\varphi = \frac{R}{r}\vartheta - \vartheta = \frac{R-r}{r}\vartheta \,.$$

Pokud by se koule otáčela po rovině, tak by nebylo potřeba ϑ odečíst. Je to korekce, kterou si lze představit nakloněním roviny o daný úhel ϑ. Takto můžeme uvažovat i při studování smyčky, protože jako nakloněnou rovinu lze reprezentovat tečnu ke smyčce v libovolném daném bodě. Úhlová rychlost rotace kuličky je definována jako časová derivace úhlu natočení φ, tedy

$$\omega = \frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}t} = \frac{R-r}{r}\omega_{\mathrm{s}} \,.$$

kde jsme použili označení

$$\frac{\mathrm{d}\vartheta}{\mathrm{d}t} \equiv \omega_{\mathrm{s}}$$

pro úhlovou rychlost pohybu kuličky okolo osy smyčky. Těžiště se pohybuje rychlostí v a je vzdáleno $R-r$ od osy, proto

$$\omega_\mathrm{s} = \frac{v}{R-r}\,.$$

Dosazením do vyjádření ω dostaneme

$$\omega = \frac{R-r}{r}\frac{v}{R-r} = \frac{v}{r}$$

tedy stejný vztah jako pro pohyb po rovině. Zákon zachování energie a rovnost sil proto vskutku můžeme použít v podobě uvedené výše.

Nyní již k samotnému řešení. Z rovnosti sil v horní úvrati vyjádříme kvadrát rychlosti

$$v^2 = g(R-r)$$

a do ZZME dosadíme moment setrvačnosti koule $J = 2mr^2/5$ a $\omega = v/r$, čímž dostaneme

$$mg(h-2R+r) = \frac{7}{10}mv^2\,,$$

kde na levé straně je pokles potenciální energie mezi počátkem a horní úvratí. Dosazením za rychlost získáme finální rovnici

$$h-2R+r = \frac{7}{10}(R-r)\,.$$

Hledaná výška h je tedy

$$h = \frac{1}{10}\left(27R-17r\right)\,.$$

Nyní si ještě můžeme rozmyslet, že čím menší koule bude, tím výše ji musíme na počátku umístit, neboť i ve smyčce se její těžiště dostane výše. Pokud kouli nahradíme hmotným bodem, tak v energetické bilanci zmizí rotační část a dostaneme $h = (5/2)R$, což bude odpovídat případu s koulí pro $r = (2/17)R$.

Jakub Dvořák
`faktorial@fykos.cz`