Úloha VI.5 ... závody částic

5 bodů; průměr 4,03; řešilo 35 studentů

V homogenním magnetickém poli $\boldsymbol{B} = (0, 0, B_0)$, $B_0 = 5 \cdot 10^{-5}\,\mathrm{T}$ *obíhají po kružnicích v rovině* xy *dvě částice, elektron s hmotností* $m_\mathrm{e} = 9{,}1 \cdot 10^{-31}\,\mathrm{kg}$ *a nábojem* $-e = -1{,}6 \cdot 10^{-19}\,\mathrm{C}$ *a alfa částice s hmotností* $m_\mathrm{He} = 6{,}6 \cdot 10^{-27}\,\mathrm{kg}$ *a nábojem* $2e$. *Poloměr trajektorie elektronu je* $r_\mathrm{e} = 2\,\mathrm{cm}$, *poloměr trajektorie alfa částice je* $r_\mathrm{He} = 200\,\mathrm{m}$. *V jednom okamžiku zapneme slabé homogenní elektrické pole* $\boldsymbol{E} = (0, 0, E_0)$, $E_0 = 5 \cdot 10^{-5}\,\mathrm{V{\cdot}m^{-1}}$. *Určete, jaké dráhy* s_e *a* s_He *urazí každá z částic za čas* $t = 1\,\mathrm{s}$ *od zapnutí elektrického pole. Předpokládejte, že částice jsou dostatečně vzdálené a nevyzařují.* *Mirek se učil na zkoušku z plazmatu.*

Na nabitou částici v elektromagnetickém poli působí Lorentzova síla

$$\boldsymbol{F} = q(\boldsymbol{E} + \boldsymbol{v} \times \boldsymbol{B})\,,$$

kde q je náboj částice a $\boldsymbol{v}$ její rychlost. Dokud je elektrické pole nulové, pohybuje se částice po kružnici a působí na ni pro zadané $\boldsymbol{B}$ dostředivá síla

$$F_\perp = q v_\perp B_0 = \frac{m v_\perp^2}{r_\mathrm{L}}\,,$$

kde r_L nazýváme Larmorův poloměr a m je hmotnost částice. Velikost rychlosti $v_\perp$, kterou se částice pohybuje po kružnici, je potom

$$v_\perp = \frac{q B_0 r_\mathrm{L}}{m}\,.$$

Po zapnutí elektrického pole přibude konstantní síla ve směru polí

$$F_\parallel = q E_0\,,$$

v čase t tedy bude mít částice paralelní rychlost

$$v_\parallel = \frac{F_\parallel}{m} t = \frac{q E_0}{m} t\,.$$

Uvědomme si, že silové působení obou polí na částici je v navzájem kolmých směrech pouze díky speciální konfiguraci tohoto problému, pro libovolné směry polí by rozklad nebyl takto triviální. Složením obou rychlostí vidíme, že pohyb probíhá po helikální trajektorii, přičemž sklon šroubovice narůstá. Naším úkolem je určit délku šroubovice. V průmětu do roviny xy urazí elektron dráhu

$$s_{\mathrm{e}\perp} = \frac{e B_0 r_\mathrm{e}}{m_\mathrm{e}} t\,,$$

kde jsme dosadili ze zadání konkrétní hodnoty náboje, hmotnosti a Larmorova poloměru pro elektron. Ve směru z se pohybuje elektron rovnoměrně zrychleně a urazí dráhu

$$s_{\mathrm{e}\parallel} = \frac{e E_0}{2 m_\mathrm{e}} t^2\,.$$

Rozvinutím šroubovice do roviny xz nám ukáže, že délka celé šroubovice bude rovna délce paraboly, která má vrchol v bodě $[0, 0]$ (bod, kde se nacházela částice v okamžiku zapnutí $\boldsymbol{E}$) a prochází bodem $[s_{\mathrm{e}\perp}, s_{\mathrm{e}\parallel}]$. Máme tedy parabolu tvaru $y = ax^2$, dosazením krajních bodů vyjádříme $a = s_{\mathrm{e}\parallel}/s_{\mathrm{e}\perp}^2$. Nyní už můžeme určit celkovou dráhu

$$s_\mathrm{e} = \int_0^{s_{\mathrm{e}\perp}} \sqrt{1 + (y')^2}\,\mathrm{d}x = \int_0^{s_{\mathrm{e}\perp}} \sqrt{1 + 4a^2x^2}\,\mathrm{d}x = \left[\frac{x}{2}\sqrt{1 + 4a^2x^2} + \frac{1}{4a}\sinh^{-1}(2ax)\right]_0^{s_{\mathrm{e}\perp}}\,,$$

kde jsme využili substituci tvaru $2ax = \sinh z$. Po dosazení mezí

$$s_\mathrm{e} = \sqrt{\frac{s_{\mathrm{e}\perp}^2}{4} + s_{\mathrm{e}\parallel}^2} + \frac{s_{\mathrm{e}\perp}^2}{4s_{\mathrm{e}\parallel}} \sinh^{-1} \frac{2s_{\mathrm{e}\parallel}}{s_{\mathrm{e}\perp}} = \frac{et}{2m_\mathrm{e}} \sqrt{(B_0 r_\mathrm{e})^2 + (E_0 t)^2} + \frac{eB_0^2 r_\mathrm{e}^2}{E_0 m_\mathrm{e}} \sinh^{-1} \frac{E_0 t}{B_0 r_\mathrm{e}} \,.$$

Pro alfa částici bychom postupovali zcela analogicky. Lze si všimnout, že s rostoucím časem se bude s_e blížit $s_{\mathrm{e}\parallel}$, poměr vzdáleností $s_\mathrm{e}/s_\mathrm{He}$ se tedy bude blížit $m_\mathrm{He}/(2m_\mathrm{e})$. Výsledné dráhy jsou po dosazení zadaných hodnot $s_\mathrm{e} = 4{,}4 \cdot 10^6$ m a $s_\mathrm{He} = 4{,}9 \cdot 10^5$ m. Jedná se však o zvláštní závod, protože částice jsou urychlovány opačnými směry. Jelikož jsme však za měřítko úspěchu zvolili celkovou uraženou dráhu, elektron vyhraje. Nakonec ještě poznamenejme, že rychlejší z částic (elektron) se pohybuje zhruba setinovou rychlostí světla, není proto ještě nutné zahrnout relativistické efekty.

Miroslav Hanzelka
mirek@fykos.cz

Fyzikální korespondenční seminář je organizován studenty MFF UK. Je zastřešen Oddělením pro vnější vztahy a propagaci MFF UK a podporován Ústavem teoretické fyziky MFF UK, jeho zaměstnanci a Jednotou českých matematiků a fyziků.

Toto dílo je šířeno pod licencí Creative Commons Attribution-Share Alike 3.0 Unported.
Pro zobrazení kopie této licence navštivte http://creativecommons.org/licenses/by-sa/3.0/.